



## UM MODELO DE UMA RODA DE REAÇÃO COM ESTIMAÇÃO DOS PARÂMETROS DE ATRITO POR FILTRO DE KALMAN

Diego Camilo Fernandes<sup>1</sup>, [dcfernandes@metrosp.com.br](mailto:dcfernandes@metrosp.com.br)  
Hélio Koiti Kuga<sup>2</sup>, [hkk@dem.inpe.br](mailto:hkk@dem.inpe.br)  
Valdemir Carrara<sup>2</sup>, [val@dem.inpe.br](mailto:val@dem.inpe.br)  
Rodrigo Alvite Romano<sup>3</sup>, [rromano@maua.br](mailto:rromano@maua.br)

<sup>1</sup> Companhia do Metropolitano de São Paulo, METRÔ, Rua Augusta, 1626, São Paulo, SP, 01304-902

<sup>2</sup> Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais, INPE, Av dos Astronautas, 1758, São José dos Campos, SP, 12227-101

<sup>3</sup> Instituto Mauá de Tecnologia, IMT, Praça Mauá 1, São Caetano do Sul, SP, 09580 900

**Resumo:** Dentre os diversos dispositivos atuadores utilizados no controle de atitude de um satélite artificial, é comum a utilização de rodas de reação por tratar-se de um atuador de alto desempenho e precisão. Dada a importância desse atuador, sobretudo no que se refere a modelagem dos atritos em seus mancais cuja natureza é não linear, o presente artigo mostra o desenvolvimento de um modelo para rodas de reação, baseado em observações e estimativas obtidas através de ensaios com uma roda real utilizando-se a técnica da filtragem de Kalman. O modelo de atrito proposto incorpora atritos de várias origens. Os resultados mostram que o modelo ajusta-se bem ao comportamento da roda de reação nos experimentos realizados. Conforme esperado, em velocidades baixas, devido ao nível de ruído nas medidas de velocidade, o modelo tem desempenho inferior.

**Palavras-chave:** Determinação de atitude, roda de reação, filtro de Kalman, estimação de parâmetros

### 1. INTRODUÇÃO

A orientação de um satélite, em relação a um sistema de referência conhecido, é denominada atitude e o movimento de rotação em torno do seu centro de massa é denominado movimento de atitude. Dentre os diversos dispositivos atuadores utilizados no controle de atitude de um satélite artificial, a roda de reação é uma das opções mais utilizadas por tratar-se de um atuador de dimensões reduzidas, pequena massa, baixo consumo de energia, altos níveis de desempenho com grande confiabilidade e mais baixo torque de distúrbio. Rodas de reação são motores DC brushless dotados de um rotor com grande inércia. Ao aplicar-se um torque ao motor, este responde com um torque (princípio da ação e reação) no sentido contrário, que pode ser utilizado para controlar a posição ou velocidade angular de um satélite (Wertz, 1978). Como este torque é de origem interna, ele não altera o momento angular total do satélite.

Dada a importância do estudo desse tipo de atuador, sobretudo no que se refere a modelagem dos atritos em seus mancais cuja natureza é não linear, o presente artigo mostra o desenvolvimento de um modelo para rodas de reação, baseado em observações e estimativas obtidas através de ensaios com uma roda real utilizando-se a técnica da filtragem de Kalman.

Em geral, três termos para o modelo do torque de atrito são considerados: o atrito de Coulomb (parcela dependente do sinal da velocidade angular da roda), o atrito estático-fricção (torque de atrito em velocidade angular nula) e o atrito viscoso (torque de atrito proporcional à velocidade angular da roda). Modelos mais completos consideram um termo denominado atrito de Stribeck<sup>[1]</sup>, cuja parcela visa quantificar o decréscimo monotônico do atrito na transição entre as condições estática e inicial do movimento.

O atrito é um fenômeno não-linear, que está universalmente presente no movimento dos corpos em contato. Em particular numa roda de reação, impacta em todos os seus regimes de operação, exigindo para o alcance da alta precisão de posicionamento, indispensável no controle de atitude de satélites artificiais, o conhecimento da natureza dos torques envolvidos. Muitas abordagens foram desenvolvidas para explicar o fenômeno de atrito e.g. Olsson et al. (1998), Canudas e Ge (1997), porém os modelos introduzidos são baseados nos resultados experimentais em vez de deduções analíticas.

Os modelos empíricos que tratam o fenômeno de Stribeck são: modelo de Tustin (exponencial na velocidade  $e^{-(\omega/\omega_s)}$ ), modelo de Gauss ( $e^{-(\omega/\omega_s)^2}$ ) e modelo de Lorentz ( $[1+(\omega/\omega_s)^2]^{-1}$ ). Conforme a necessidade, esses termos

[1] O atrito de Stribeck foi verificado experimentalmente no início do século XX, pelo cientista alemão Richard Stribeck (1861-1950), enquanto investigava a relação da força de atrito com a velocidade do movimento

podem ser acrescentados a modelos simples para a obtenção de um novo modelo mais efetivo no regime de baixa rotação da roda de reação.

Iniciativas no INPE em décadas passadas (Souza, et al., 1985, 1987) retratam a importância deste tipo de atuador e mais recentemente com o desenvolvimento de sistemas de controle de atitude em 3 eixos em todas as missões futuras previstas (e.g. CBERS-3 e 4, Amazonia, Lattes). Um experimento de roda de reação (Souza, 1989, 1990) foi embarcado no satélite brasileiro SCD2 que ainda está em órbita. Modelos devem ser desenvolvidos e testados a fim de melhorar o desempenho do sistema de controle, como por exemplo em Moreira et al. (2005) onde se realizou uma análise do modelo Bristle.

Neste trabalho propõe-se um modelo abrangendo os atritos viscoso, de Coulomb, e Stribeck, através de medidas de velocidade angular que em geral estão disponíveis neste particular atuador. Vários ensaios foram realizados com o objetivo de estimar parâmetros do modelo de forma recursiva em tempo real. Os dados são processados através de um filtro estendido de Kalman, devido a natureza não linear do fenômeno. Mostra-se o equacionamento dinâmico e o filtro estendido desenvolvido. Os resultados mostram desempenho satisfatório, para a maioria dos regimes de trabalho, com desempenho inferior em baixas rotações. Este resultado não é inesperado já que o nível de precisão dos dados de velocidade são apenas razoáveis, da ordem de 5rpm.

## 2. MODELO MATEMÁTICO

Uma roda de reação pode ser modelada através de sua inércia  $J_w$ , seu atrito viscoso  $b$  e um atrito de Coulomb  $c$  conforme a seguinte equação diferencial (Carrara e Milani, 2007):

$$T_m = J_m \dot{\omega}_w + b \omega_w + c \text{sign}(\omega_w) \quad (1)$$

onde  $\omega_w$  é a velocidade angular da roda de reação,  $T_m$  é o torque do motor, e  $\text{sign}$  é a função sinal. Admitindo a ausência de não-linearidades na conversão eletro-mecânica do motor interno a roda, podemos considerar linear a relação entre corrente de excitação  $I$  e torque  $T_m$ :

$$T_m = k_m I \quad (2)$$

Entretanto, se considerarmos o fenômeno do atrito Stribeck segundo o modelo de Gauss (Olsson et al., 1998; Márton e Lantos, 2007), a Eq. (1) pode ser reescrita na forma:

$$T_m = J_m \dot{\omega}_w + b \omega_w + c \text{sign}(\omega_w) + ((s - c) e^{-(\omega/\omega_s)^2}) \text{sign}(\omega_w) \quad (3)$$

onde  $s$  e  $\omega_s$ <sup>[2]</sup> são respectivamente o torque de atrito e a velocidade de Stribeck. Por fim, sob a ótica do experimento empírico, obtemos o modelo em termos de sua entrada  $I$  e saída  $\omega$ :

$$I = k_m^{-1} J_m \dot{\omega}_w + k_m^{-1} b \omega_w + k_m^{-1} c \text{sign}(\omega_w) + ((s - c) e^{-(\omega/\omega_s)^2}) k_m^{-1} \text{sign}(\omega_w) \quad (4)$$

### 2.1. Representação em Espaço de Estados

Em termos de um processo estocástico, o problema de estimação dos parâmetros do modelo, na forma de espaço de estados será:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, u, t) + \mathbf{w} \quad (5)$$

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{H}_k \mathbf{x}_k + \mathbf{v}_k \quad (6)$$

onde o vetor de estado a ser estimado é:

$$\mathbf{x} \equiv [\omega_w \quad k_m / J_m \quad b / J_m \quad c / J_m \quad s / J_m]^T \equiv [x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4 \quad x_5]^T \quad (7)$$

e o termo forçante é a corrente, i.e:

<sup>[2]</sup> Fator utilizado para ajuste da atenuação do termo relacionado a  $s$ ; valores empíricos são atribuídos a ele (Romano, 2010).

$$u \equiv [I]. \quad (8)$$

Considera-se que  $w$  e  $v_k$  são ruídos brancos com estatísticas dadas por  $w = N(0, Q)$  e  $v_k = N(0, R_k)$ , com  $R_k = 1 \text{rpm}^2$ . O modelo de observações é linear no vetor de estado e o vetor  $H$ , a cada instante  $t_k$ , vale:

$$H_k \equiv (\omega_k, 0, 0, 0, 0). \quad (9)$$

## 2.2. Filtro de Kalman

O filtro de Kalman utilizado para resolver o problema é o tipo estendido, pois o modelo dinâmico contém estados estados que variam não-linearmente. Esse filtro é capaz de gerar trajetórias de referência que são atualizadas a cada processamento das medidas do instante correspondente (Brown e Huang, 1996, Kuga, 2005). A Fig. 1 mostra pictoricamente o funcionamento do filtro estendido de Kalman, onde a cada passo é gerada uma trajetória sobre a estimativa do estado mais atual.

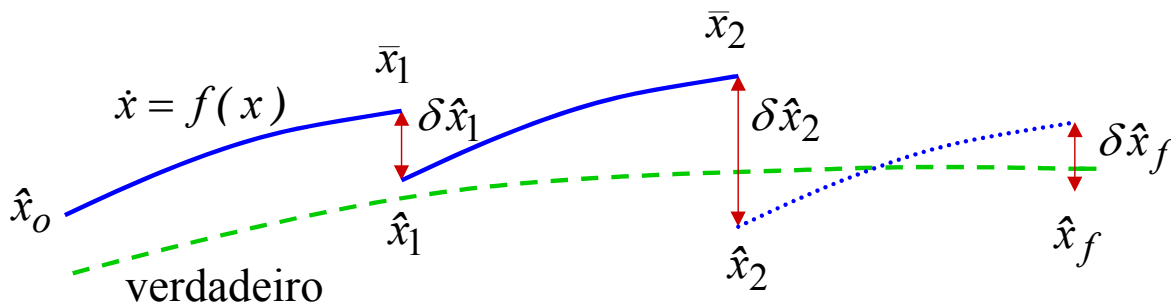


Figura 1. Diagrama temporal do filtro estendido de Kalman

Para aplicação do filtro estendido são geradas matrizes jacobianas referentes às matrizes de funções não-lineares da dinâmica, Eq. 5, obtendo-se as respectivas expressões, para os termos não-nulos:

$$\frac{\partial \dot{x}_1}{\partial x_1} = -x_3 + 2 \frac{x_1}{v_s} \frac{1}{v_s} \text{sign}(x_1)(x_5 - x_4) e^{-(x_1/v_s)^2} \quad (10)$$

$$\frac{\partial \dot{x}_1}{\partial x_2} = I \quad (11)$$

$$\frac{\partial \dot{x}_1}{\partial x_3} = -x_1 \quad (12)$$

$$\frac{\partial \dot{x}_1}{\partial x_4} = -\text{sign}(x_1) \left[ 1 - e^{-(x_1/v_s)^2} \right] \quad (13)$$

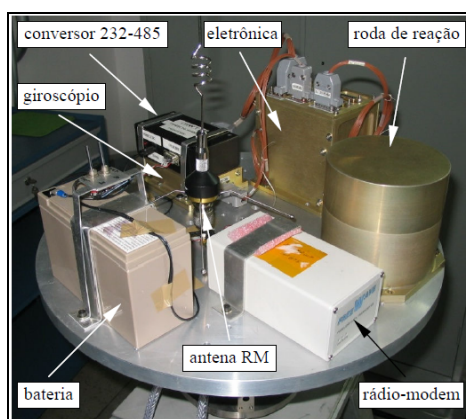
$$\frac{\partial \dot{x}_1}{\partial x_5} = -\text{sign}(x_1) \left[ e^{-(x_1/v_s)^2} \right] \quad (14)$$

## 3. PROCEDIMENTO EXPERIMENTAL

Para a coleta de dados necessária na estimação dos parâmetros foram utilizados os recursos disponíveis nas instalações do Laboratório de Simulação da Divisão de Mecânica Espacial e Controle do INPE. A roda de reação selecionada para o experimento, produzida pela empresa SunSpace (Engelbrecht, 2005), oferece uma interface de comunicação serial padrão RS-232 que permite além do acesso a diversos registros de operação em especial aos responsáveis pelo seu acionamento através de corrente e velocidade angular. Ela apresenta as seguintes características: velocidade de rotação entre  $\pm 4200$  rpm, torque máximo de 50 mili-Nm, momento angular máximo de 0,65 Nms, momento de inércia do rotor de  $1,5 \cdot 10^{-3} \text{ kg m}^2$ , erro da malha de rastreamento de velocidade menor do que 1 rpm e consumo de corrente de 40mA / mili-Nm a 12 VDC.

Outros equipamentos como bateria, para alimentação, e sistema rádio-modem, para monitoramento e aquisição remota dos dados, foram utilizados. Todos os equipamentos que constituíam o subsistema principal, incluindo a roda de

reação, foram dispostos sob uma mesa de mancal aeroestática de um eixo (Carrara e Milani, 2005), e durante o experimento a mesa de mancal foi configurada na posição estática, vide Fig. 2.



**Figura 2. Subsistema principal – roda de reação**

O subsistema periférico, aquisitor, foi constituído de um rádio modem interligado através de um conversor serial-USB a um PC industrial modelo PXI<sup>®</sup> da empresa National Instruments, Fig. 3. O software aquisitor foi escrito em C++ e executado numa plataforma Windows 2000<sup>®</sup>.



**Figura 3. Subsistema periférico- PC industrial**

Para excitação da roda de reação e realização de seu movimento foi escolhido um sinal do tipo senoidal com o intuito de submetê-la a diversos ciclos de inversão de sentido acompanhados de cruzamentos pelo zero da velocidade. A Tabela 1 mostra os tipos de excitação com os dados de frequência, amplitude e fase.

**Tabela 1. Leis de excitação utilizadas no experimento**

Experimento	Excitação (mili-A)	Tempo de simulação (s)
Sinal 1	$100\text{sen}[(2\pi/480)t] - 50$	1440
Sinal 2	$100\text{sen}[(2\pi/120)t] - 50$	360
Sinal 3	$100\text{sen}[(2\pi/30)t] - 50$	90
Sinal 4	$200\text{sen}[(2\pi/120)t] - 50$	360
Sinal 5	$200\text{sen}[(2\pi/30)t] - 50$	90

Devido à zona morta, observada em testes preliminares em torno do ponto de repouso da roda, acrescentou-se um viés ao sinal excitante na ordem de -50mili-A. A uma taxa de 100ms (10Hz), o software aquisitor enviava remotamente um novo valor ao registro de comando por corrente da roda e efetuava uma leitura de velocidade referente ao intervalo anterior.

#### 4. RESULTADOS

Os dados coletados antes de submetidos ao Filtro de Kalman passaram por um algoritmo de Mínimos Quadrados não-linear ponderado, modificado para a obtenção do conjunto de condições iniciais relacionada aos parâmetros estimados (Kuga, 2005). Essa etapa preliminar foi uma medida de garantia para que o filtro de Kalman convergisse em todas as suas estimativas, já que uma condição inicial muito errônea pode acarretar a não-convergência do filtro. Todos os algoritmos de estimação utilizados foram escritos e executados em ambiente MATLAB<sup>®</sup>.

Os valores finais alcançados para as estimativas, após o processamento pelo filtro de Kalman, de cada parâmetro são exibidos nas figuras que se seguem. A Fig. 4 mostra os parâmetros estimados ao longo do tempo, de atrito (Coulomb, Stribeck e viscoso), e a constante do motor. Os atritos de Coulomb e Stribeck tem valores semelhantes de modo que em baixas velocidades a diferença entre eles tende a se anular. O atrito viscoso tem valor pequeno comparativamente mas é o termo sensível a magnitude da velocidade angular que pode atingir altos valores. A constante do motor varia muito pouco.

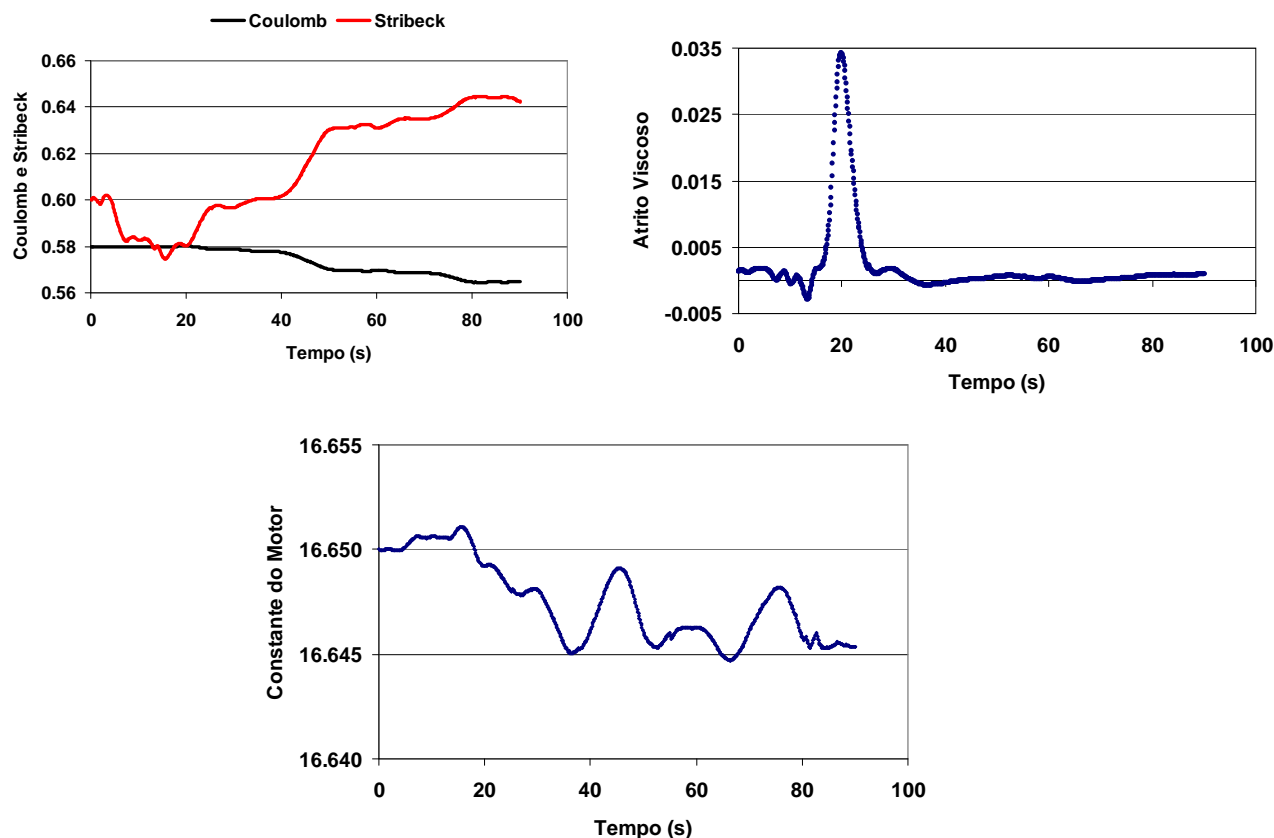


Figura 4. Valores estimados dos parâmetros

Estes valores dos parâmetros estimados tem bastante consistência com um trabalho anterior (Carrara e Milani, 2005), onde somente os atritos viscoso e de Coulomb foram deterministicamente avaliados. Em Carrara e Milani (2005) esses valores foram  $b/J = 0.00344$  (viscoso),  $c/J = 0.5863$ ,  $k/J = 18.000$  (constante do motor), com  $J = 1.5E-3$  (inércia). Neste trabalho, ao fim do período de estimação os valores foram  $b/J = 0.00099 \pm 0.00037$  (viscoso),  $c/J = 0.5650 \pm 0.0099$ ,  $k/J = 16.645 \pm 0.001$  (constante do motor), para a mesma inércia  $J$ . Adicionalmente o atrito de Stribeck estimado ficou em  $s/J = 0.6424 \pm 0.0054$ .

Na Fig. 5, no gráfico à esquerda, mostra-se o resultado da estimação da velocidade angular em relação aos valores medidos ao longo do intervalo completo do ensaio. Nota-se que, nesta escala, é imperceptível a diferença. No gráfico à direita da Fig. 5, mostra-se um zoom dos resultados do ensaio no início (até 17s), onde baixas velocidades estão presentes. Nota-se o ajuste entre os valores estimados (azul), medidos (vermelho), e os resíduos (preto). O software desenvolvido permite lidar com transições entre velocidades negativas e positivas, ressaltando que em baixas velocidades a precisão é degradada. Observando-se os resíduos, pode-se considerar que o ajuste foi satisfatório a um nível inferior a 5 rpm.

A Fig. 6 mostra o resultado do ajuste da velocidade angular para o experimento excitado com sinal 1, conforme Tabela 1. Os resíduos foram ajustados ao nível de 1 rpm RMS. Este é o mais longo dos ensaios e mostra o ajuste para rotações de até 2200rpm. Todos os outros ensaios (sinais 2, 4, 5, 6) tiveram comportamento e desempenho semelhantes.

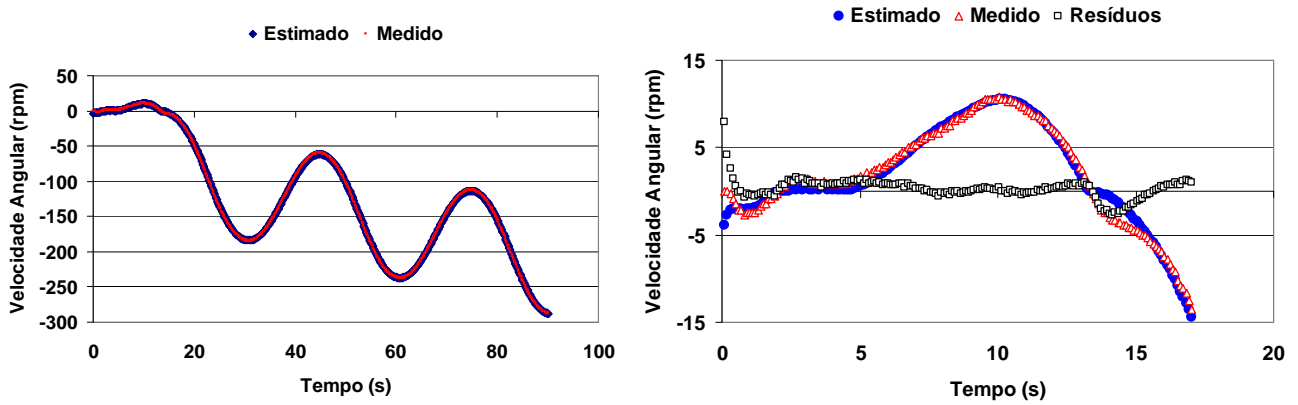


Figura 5. Resultados para estimativa de velocidade angular

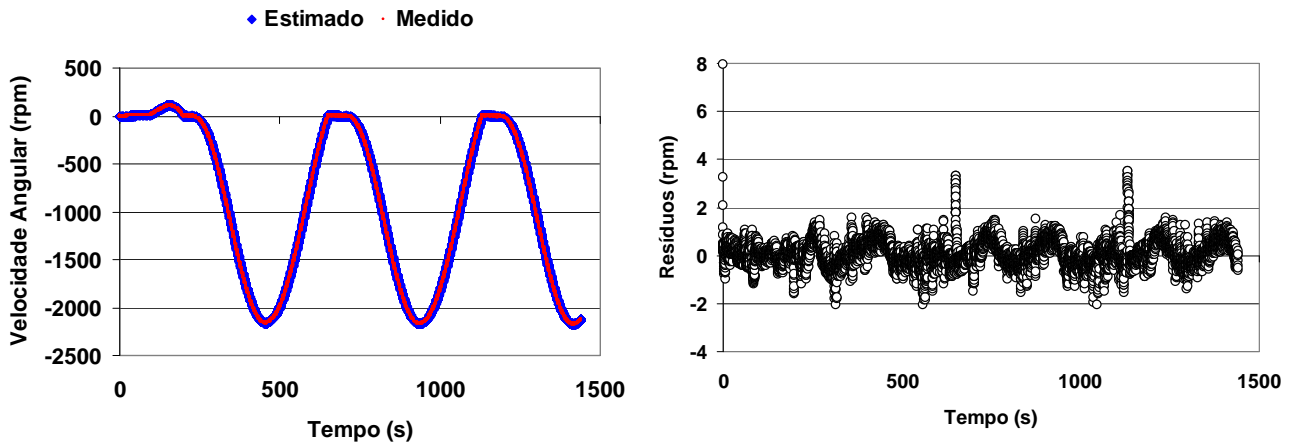


Figura 6. Estimativa de velocidade angular para ensaio até 1440s

Em relação ao software desenvolvido, foi criado um ambiente de simulação SIMULINK® com blocos de simulação baseado nos dados (medidas) obtidos. O primeiro bloco desenvolvido, mais abstrato, denominado *Reation Wheel Current Control*, é para uso em simulações que utilizem a roda de reação como objeto de estudo. Internamente esse bloco incorpora a dinâmica da roda de reação incluindo a função de transferência do motor, a saturação necessária para manter o comando de corrente dentro de uma faixa admissível, o ruído dinâmico associado às medidas de velocidade e um modelo de atrito interno parametrizável. O segundo bloco, interno ao primeiro, denominado *Friction Model* representa a modelagem fenomenológica do atrito na totalidade de suas parcelas (Viscoso, Coulomb, Stribeck) completamente parametrizáveis.

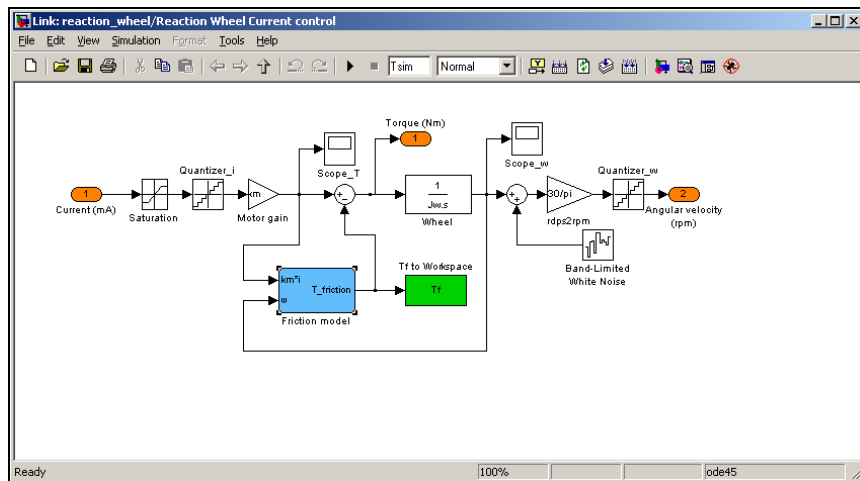


Figura 7. Bloco de simulação *Reation Wheel Current Control*

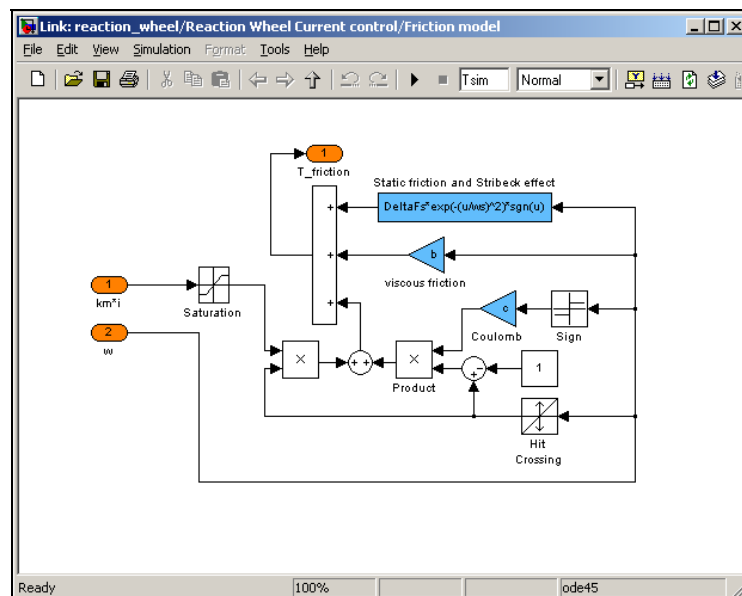


Figura 8. Bloco de simulação *Friction Model*

## 5. CONCLUSÕES

Neste trabalho, estimou-se os parâmetros que modelam os atritos agentes em uma roda de reação, que são os atuadores mais precisos para controle de atitude de satélites. A incorporação do efeito de Stribeck ao modelo de atrito foi possível devido a eficiência do filtro de Kalman em estimá-lo a partir da observação de medidas incertas da velocidade angular numa região não linear de operação. Esse fato permitiu o aperfeiçoamento de uma plataforma de simulação mais adequada e acessível, que permite a realização de pesquisas futuras. Os resultados mostram que o modelo ajusta-se bem ao comportamento da roda de reação ensaiada, exceto em velocidades baixas, na qual ambas, a presença de ruídos nas medidas aliada a deficiência no modelo dos atritos, afetam o ajuste dos parâmetros. O modelo proposto irá proporcionar uma plataforma de simulação adequada para o desenvolvimento e aperfeiçoamento de sistemas de controle dedicados ao desenvolvimento de uma roda de reação para aplicações espaciais.

## 6. REFERÊNCIAS

- Brown, R. G. and Hwang, P. Y. C., 1996, "Introduction to Random Signals and Applied Kalman Filtering", John Wiley & Sons, New York.
- Canudas de Wit, C.; Ge, S.S., 1997, "Adaptive friction compensation for system with generalized velocity/position friction dependency." Proceedings of the 36<sup>th</sup> Conference on Decision and Control, San Diego, CA, Dec. 1997, pp. 2465-2470.
- Carrara, V.; Milani, P. G., 2007, "Controle de uma mesa de mancal a ar de um eixo equipada com giroscópio e roda de reação", V SBEIN - Simpósio Brasileiro de Engenharia Inercial. Rio de Janeiro, 26-29 Nov., pp. 97-102.
- Engelbrecht, J. A. A., 2005, "User's Manual for the SunSpace reaction wheel and gyroscope subsystem." SunSpace, Matieland, South Africa. (SS01-106000).
- Kuga, H.K., 2005, "Noções Práticas de Técnicas de Estimção - Notas de Aula", São José dos Campos, Brasil.
- Romano, R.A., 2010, "Identificação de processos não-lineares e quantificação de atrito em válvulas de controle", Tese (Doutorado) – Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, São Paulo.
- Moreira, M.L.B.; Lopes, R.V.F.; Kuga, H.K., 2005, "Estimation of torque in a reaction wheel using a Bristle model for friction." Proceedings of 18<sup>th</sup> International Congress of Mechanical Engineering, Ouro Preto, MG, Brazil, Nov. 6-11.
- Olsson, H.; Astrom, K. J.; de Wit, Gafvert, C. C.; Lischinsky, M. P., 1998, "Friction models and friction compensation." European Journal of Control, Vol. 4, No. 3., pp. 176-195.
- Souza, P.N.; Fleury, A.T.; Fellipe de Souza, J.A.M., 1985, "Projeto de um modelo experimental de uma roda de reação para controle de atitude de satélites artificiais". Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica, 8., (COBEM), 10-13 dez., São José dos Campos. (INPE-3526-PRE/747).
- Souza, P.N.; Fleury, A.T., 1987, "Modelo experimental de uma roda de reação para controle da atitude de satélites artificiais: construção, simulação e testes". Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica, 9., (COBEM), 7-11 dez., Florianópolis. (INPE-4274-PRE/1146).

- Souza, P.N. SCD-2, 1989, "Reaction wheel experiment subsystem specification." São José dos Campos: INPE, nov.. (A-ETC-0070). Publicação Interna.
- Souza, P.N. SCD-2, 1990, "Reaction wheel experiment equipment specification." São José dos Campos: INPE, maio. (A-ETC-0093). Publicação interna ao INPE.
- Wertz, J. R., 1978, "*Spacecraft attitude determination and control.*" London, D. Reidel. (Astrophysics and Space Science Library).

## **7. DIREITOS AUTORAIS**

Os autores são os únicos responsáveis pelo conteúdo do material impresso incluído no seu trabalho.



## A WHEEL REACTION MODEL WITH ESTIMATION OF THE PARAMETERS OF FRICTION IN KALMAN FILTER

Diego Camilo Fernandes<sup>1</sup>, [dfernandes@metrosp.com.br](mailto:dfernandes@metrosp.com.br)

Hélio Koiti Kuga<sup>2</sup>, [hkk@dem.inpe.br](mailto:hkk@dem.inpe.br)

Valdemir Carrara<sup>2</sup>, [val@dem.inpe.br](mailto:val@dem.inpe.br)

Rodrigo Alvite Romano<sup>3</sup>, [rromano@maua.br](mailto:rromano@maua.br)

<sup>1</sup> Companhia do Metropolitano de São Paulo , METRÔ, Rua Augusta, 1626, São Paulo, SP, 01304-902

<sup>2</sup> Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais, INPE, Av dos Astronautas, 1758, São José dos Campos, SP, 12227-101

<sup>3</sup> Instituto Mauá de Tecnologia, IMT, Praça Mauá 1, São Caetano do Sul, SP, 09580 900

**Abstract:** *Among the various actuator devices used in attitude control of an artificial satellite, it is common to use reaction wheels because it is an actuator with high performance and accuracy. Given the importance of this actuator, especially as regards the modeling of friction in its bearings whose nature is not linear, this article shows the development of a model for reaction wheels, based on observations and estimates obtained by testing with a wheel real using the Kalman filtering technique. The model friction proposed incorporates frictions of various origins. The results show that the model fits well to conduct the reaction wheel in the experiments. As expected, at low speeds due to the level of noise in the velocity measurements, the model has underperformed.*

**Keywords:** *Attitude determination, reaction wheel, Kalman filtering, parameters estimation*