NSVenkataraman

1. Publicação nº	2. Versão	3. Data	5. Distribuição
INPE-2454-TDL/094		*Junho, 1982*	☐ Interna ☒ Externa ☐ Restrita
4. Origem *DRH/DCE*	Programa *FRH/CEA*		

6. Palavras chaves - selecionadas pelo(s) autor(es)
FORÇAS EM SATÉLITES
TORQUES EM SATÉLITES
AERODINÂMICAS EM SATÉLITES

7. C.D.U.: *629.7.015.7*

8. Título *INPE-2454-TDL/094*

MODELAGEM DAS FORÇAS E TORQUES ATUANTES EM SATÉLITES

10. Páginas: *153*

11. Última página: *B.4*

12. Revisada por

NSVenkataraman
N. S. Venkataraman

9. Autoria *Valdemir Carrara*

Assinatura responsável Valdemir Carrara

13. Autorizada por

Parada
Nelson de Jesus Parada
Diretor

14. Resumo/Notas

A crescente necessidade de simular, com a máxima precisão, tanto a posição quanto a atitude de satélites artificiais tem provocado o desenvolvimento de teorias mais sofisticadas, que calculam as forças perturbadas que atuam nestes satélites. Estudam-se, neste trabalho, as teorias encontradas na literatura que melhor representam o fenômeno real, sem contudo introduzirem muita complexidade na sua formualação. Foram consideradas as principais forças e torques atuantes em satélites típicos, e a seguir foi desenvolvido um programa conputacional que, baseado nestas teorias, calcula numericamente as forças através da descrição da geometria do satélite. Este programa foi aplicado em seguida a um satélite experimental, cujo formato é semelhante ao proposto para um dos satélites da missão espacial brasileira. Foram então calculados para este satélite as forças e torques perturbadores, com a intensão de deteminar a grandeza relativa de cada uma, bem como os parâmetros mais influentes. Verificou-se que a atitude possui grande correlação com as forças, principalmente com os torques. As características da superfície do satélite tanto quanto sua temperatura e geometria também influem em algumas forças.

15. Observações

Dissertação de mestrado em Ciência Espacial, aprovada em 16 de fevereiro de 1982.

Aprovada pela Banca Examinadora
em cumprimento a requisito exigido
para a obtenção do Título de Mestre
em Ciência Espacial

Dr.Santiago Alves Tavares — Presidente

Dr.Nellore S.Venkataraman — Orientador

Dr.Jerzy Tadeusz Sielawa — Membro da Banca -convidado-

Dr.Atair Rios Neto — Membro da Banca

Dr.Aydano Barreto Carleial — Membro da Banca

Candidato: Valdemir Carrara

São José dos Campos, 16 de fevereiro de 1982

AGRADECIMENTOS

Ao Instituto de Pesquisas Espaciais pelas facilidades concedidas à realização deste trabalho, por meio do projeto ORBAT.

Ao Dr. Nellore S. Venkataraman pela orientação e dedicação durante o desenvolvimento dessa dissertação.

Aos demais membros da Banca Examinadora, em especial ao Dr. Atair Rios Neto, pelas sugestões e conselhos ao longo do trabalho.

À minha esposa, Renata, pelo incentivo e auxílio na datilografia.

A todos os integrantes da Divisão de Dinâmica Orbital, que muito contribuíram com sugestões e comentários, e em particular a Válder Matos de Medeiros pela colaboração na confecção das figuras.

ABSTRACT

The increased demand to simulate, with high precision, the position as well as the attitude of an artificial Earth satellite has lead to the development of very complex theories that calculate the perturbing forces acting on satellites. In this work, the theories encountered in the literature that best represent the physical phenomenon without introducing too much formulation complexity are studied. The main forces and torques acting on typical satellites are discussed, and, following this, a computer program based on these theories was developed to calculate numerically these forces. Then the program has been applied to an experimental satellite, whose configura tion is similar to a proposed satellite for the Brazilian space program. The forces and torques were calculated for this satellite with the object of studying their relative magnitudes as well the parameters that influence them. The forces and the torques are strongly dependent on the satellite attitude. Also, the satellite surface characteristics, its temperature and geometry influence some of the forces and torques.

SUMÁRIO

Pág.

Pág.

LISTA DE FIGURAS

Pág.

Pág.

LISTA DE TABELAS

LISTA DE SÍMBOLOS

a - Semi-eixo maior da órbita do satélite

A_r - Área de referência

A_t - Área da seção transversal do satélite

A - Área do disco solar

$\bar{B}$ - Vetor campo magnético terrestre

c - Velocidade da luz no vácuo

$\underline{C}$ - Matriz de rotação entre o sistema do satélite e o sistema dos eixos principais de inércia

C_{BH} - Coeficiente do albedo na direção Y^s

C_{BV} - Coeficiente do albedo na direção Z^s

C_{DA} - Coeficiente de arrasto

C_{DL} - Coeficiente de sustentação

C_{EH} - Coeficiente de radiação terrestre na direção Y^s

C_{EV} - Coeficiente de radiação terrestre na direção Z^s

C_{MAX}, C_{MAY}, C_{MAZ} - Componentes do coeficiente do torque aerodinâmico

C_{MGX}, C_{MGY}, C_{MGZ} - Componentes do coeficiente do torque de gradiente de gravidade

C_{MRX}, C_{MRY}, C_{MRZ} - Componentes do coeficiente do torque de radiação

C_{RS} - Coeficiente de força de radiação na direção de incidência

C_{RL} - Coeficiente de força de radiação na direção perpendicular à de incidência

d_o - Distância da Terra ao Sol

dA - Área de um elemento de superfície do satélite

dA_T - Área de um elemento na superfície terrestre

$d\bar{F}_a^s$ - Força aerodinâmica num elemento

dF_N - Força devido à radiação incidente normal a um elemento

$d\bar{F}_R^s$ - Força de radiação num elemento

$d\bar{M}_a^s$ - Torque aerodinâmico no centro de massa devido a $d\bar{F}_a^s$

$d\bar{M}_R^s$ - Torque em relação ao centro de massa devido a $d\bar{F}_R^s$

dP_N - Força de radiação normal a um elemento

dP_T - Força de radiação tangencial a um elemento

e - Excentricidade da órbita do satélite

erf - Função erro

f - Anomalia verdadeira

f_i - Função de distribuição de velocidades das moléculas incidentes

f_w - Função de distribuição de velocidades das moléculas emergentes

$\bar{F}_a^s$ - Força aerodinâmica no satélite

$\bar{F}_B^s$ - Resultante das forças devidos ao albedo no satélite

$\bar{F}_E^s$ - Resultante das forças devidos à radiação terrestre

F_C - Força de Coulomb

$\bar{F}_R^s$ - Força de radiação no satélite

h - Altitude do satélite

i - Inclinação da órbita do satélite

I_{xx}^s, I_{xy}^s, I_{xz}^s, I_{yy}^s, I_{yz}^s, I_{zz}^s - Componentes do tensor de inércia no sistema do satélite

I'_{xx}, I'_{yy}, I'_{zz} - Componente do tensor principal de inércia

k - Constante de Boltzmann

k - Constante de forma do satélite

L_r - Comprimento característico do satélite

m - Massa média de uma molécula da atmosfera

m_i - Massa média de um íon da atmosfera

m_s - Massa do satélite

M - Anomalia média do satélite

$\tilde{M}$ - Massa molecular média local da atmosfera

$\bar{M}_a^s$ - Torque aerodinâmico no satélite

$\bar{M}_g^s$ - Torque de gradiente de gravidade

$\bar{M}_R^s$ - Torque em relação ao centro de massa devido à radiação

n_i - Número de íons por unidade de volume local

$\hat{n}_T$ - Versor normal a um elemento de área da Terra

N_a - Número de Avogrado

p_s - Pressão de radiação normal a um elemento

P_n - Pressão aerodinâmica normal a um elemento

P_t - Pressão aerodinâmica na direção tangencial

q - Carga elétrica do satélite

r - Razão entre o raio da órbita e o raio da Terra

$\bar{r}_{cg}^s$ - Raio vetor do centro de massa no sistema do satélite

$\bar{r}_e^s$ - Raio vetor do centro de um elemento no sistema do satélite

$\bar{r}_s^i$ - Raio vetor do satélite no sistema inercial

R_T - Raio terrestre

R_o - Raio médio da órbita da Terra

s - Razão de velocidades

$\hat{s}^S$ - Versor Terra-Sol no sistema do satélite

S - Constante solar à distância R do Sol

S_o - Constante solar à distância R_o do Sol

S_1 - Potência emitida pelo disco solar

T_i - Temperatura local da atmosfera

T_w - Temperatura de um elemento de superfície do satélite

$\bar{u}^s$ - Velocidade da atmosfera com relação ao satélite

$\bar{v}_a^i$ - Velocidade da atmosfera com relação ao sistema inercial

$\bar{v}_s^i$ - Velocidade do satélite com relação ao sistema inercial

$\bar{w}$ - Velocidade de rotação do satélite

$\bar{w}_t^i$ - Velocidade de rotação da Terra no sistema inercial

α - Coeficiente de acomodação térmica

α - Albedo médio terrestre

α_o - Ascensão reta do Sol

α_A - Ângulo entre $\bar{u}^s$ e o plano X^sY^s

α_R - Ângulo entre $\hat{s}^s$ e o plano X^sY^s

α_G - Ângulo entre Z^o e o plano X^sY^s

β_o - Ângulo entre X^a e X^o

β_A - Ângulo entre a projeção de $\bar{u}^s$ no plano X^sY^s e o eixo X^s

β_G - Ângulo entre o eixo X^s e a projeção de Z^o no plano X^sY^s

β_R - Ângulo entre o eixo X^s e a projeção de $\hat{s}^s$ no plano X^sY^s

γ - Reflectância do elemento de superfície do satélite

δ_o - Declinação do Sol

δ_s - Ângulo formado por $\hat{n}_T$ e Z^a

ε - Emissividade do elemento de superfície do satélite

η - Ângulo formado pela direção de incidência da radiação e pela normal ao elemento de superfície do satélite

θ - Ângulo formado por $\bar{u}^s$ e pela normal ao elemento

θ_o - Ângulo entre Z^a e o vetor Terra-Sol, $-\hat{s}^a$

θ_s - Ângulo entre Z^o e Z^s

θ_{max} - Ângulo que delimita a região visível sobre a Terra

λ - Caminho livre médio das moléculas na atmosfera

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

A principal força que atua em satélites artificiais terrestres é a atração gravitacional da Terra. As demais forças, embora pequenas, modificam ao longo do tempo os elementos orbitais dos satélites, dificultando desta forma seu rastreamento, ou seja, a determinação da sua verdadeira posição no espaço. Essas forças causam também torques sobre o centro de massa do satélite, podendo com isso alterar sua orientação (atitude) preestabelecida, na qual normalmente se deseja que o satélite permaneça. O conhecimento preciso desses torques, bem como sua variação com o tempo, é útil não só para estudar o controle e a estabilidade do satélite, como também para simular a atitude. Outra aplicação da determinação desses esforços é fornecer recursos para dimensionar certos componentes da estrutura de alguns satélites, assim como verificar seu comportamento e funcionamento quando submetidos a essas forças. É imprescindível, portanto, quando se deseja determinar, conhecer, prever ou simular órbitas ou atitudes, a perfeita compreensão dos fenômenos que acarretam o aparecimento de tais forças.

Em vista disso propõe-se a construção de um programa computacional que, utilizando algoritmos capazes de aliar rápido processamento à grande precisão, calcule as principais forças e torques em satélites com órbitas compreendidas entre 200 e 2000 km, sobre a superfície da Terra.

Um estudo crítico das teorias desenvolvidas na literatura deverá então ser feito, tendo como base a sua precisão, quando confrontadas com resultados experimentais. Também deverão ser levadas em contas as hipóteses simplificadoras que foram feitas durante sua formulação, o que limitaria a região de abrangência e reduziria a aplicabilidade. De extrema importância será o grau de complexidade dessas teorias, frente à dificuldade de serem obtidos os parâmetros com a precisão necessária para o cálculo das forças. Outro fator que ainda deve ser levado em conta seria a não-fixação da teoria por nenhuma configuração específica de satélite, que restringiria desta forma a aplicação do programa computacional a ser gerado; esta teoria deverá, outrossim, possuir um caráter geral a fim de que possa ser utilizada em outras missões e abranger todas as fases de cada uma delas.

As principais forças e torques que agem nos satélites com altitude entre 200 e 2000 km e que serão tratadas nos capítulos subsequentes são:

a) Forças e torques aerodinâmicos.

b) Forças e torques devidos à pressão de radiação solar.

c) Forças e torques devidos ao albedo terrestre.

d) Forças e torques devidos à radiação terrestre.

e) Torque de gradiente de gravidade.

f) Forças e torques eletromagnéticos.

As perturbações causadas na órbita, devido ao achatamento terrestre e às perturbações luni-solares, por serem passíveis de ser obtidas facilmente e com grande precisão, não serão abordadas neste trabalho.

A força aerodinâmica, tratada no Capítulo 3, surge em decorrência do choque entre as moléculas da atmosfera com a superfície do satélite. Ela é predominante em satélites de baixa altitude (menor que 1000 km); por isso deverá ser calculada com mais precisão. A modelagem proposta por Schaaf and Chambré (1961) para a força aerodinâmica, baseada na Teoria Cinética dos Gases de Maxwell, Boltzman e outros, fornece resultados altamente confiáveis, conforme foi demonstrado por Boettcher and Legge (1980) e Fredo and Kaplan (1981).

A radiação solar direta, tratada na Seção 4.2, deriva da reflexão e absorção dos fótons solares pela superfície do satélite.

praticamente independe da altitude do satélite, sendo normalmente a maior componente a partir dos 1000 km. Sua formulação, coerente com os requisitos aqui exigidos, foi feita nos artigos de Evans (1964) e Georgevic (1973a). A radiação refletida pela Terra ou albedo, juntamente com a emitida, ou radiação terrestre, serão tratadas nas Seções 4.3 e 4.4 respectivamente, utilizando-se para isso o equacionamento formulado nos artigos de Cunningham (1963a, 1963b).

Por sua vez, o torque de gradiente de gravidade desenvolvido no Capítulo 5 surge devido a diferentes partes do satélite estarem a diferentes altitudes. Vários livros e artigos trazem as equações do torque de gradiente de gravidade, entre outros Robertson (1958), Beletskii (1966) e Meirovitch (1970).

Devido à grande dificuldade em obter a solução das equações que fornecem as forças e torques eletromagnéticos num satélite genérico, será feita no Capítulo 6 apenas uma descrição qualitativa destas forças que resultam da interação mútua do satélite com o campo magnético terrestre e com os íons e elétrons da atmosfera.

Finalmente no Capítulo 7 aplicar-se-á a teoria desenvolvida nos capítulos precedentes a um satélite experimental, e os resultados serão analisados, com o sentido de determinar os parâmetros que mais influem nas forças e torques atuantes neste satélite.

CAPÍTULO 2

ROTAÇÕES E SISTEMAS DE COORDENADAS

Serão utilizados neste trabalho vários sistemas de coordenadas, interligados por rotações angulares cuja notação é introduzida na Seção 2.1. Os vetores serão indicados pelo traço superior, enquanto o índice minúsculo superior indica o sistema de coordenadas a que este se refere. Os vetores unitários ou versores trazem acento circunflexo em vez de traço, sendo que as direções do triedro de referência são denotadas sempre por $\hat{i}$, $\hat{j}$ e $\hat{k}$ nas direções X, Y e Z, respectivamente. Matrizes trazem um traço inferior.

2.1 - ROTAÇÕES

Será estabelecida também uma sistemática para efetuar rotações entre dois sistemas de coordenadas cartesianas. Considerando-se o sistema $X^bY^bZ^b$ indicado na Figura 2.1, efetua-se uma rotação de um ângulo θ no sentido direto, sobre o eixo X^b, fazendo-o coincidir com o sistema $X^cY^cZ^c$. A expressão que relaciona um vetor $\bar{r}^b$ no sistema $X^bY^bZ^b$ com o mesmo vetor referido ao sistema $X^cY^cZ^c$ é:

$$\bar{r}^c = \underline{R}^x(\theta)\ \bar{r}^b, \tag{2.1}$$

onde:

$$\underline{R}^x(\theta) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ 0 & -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{vmatrix}. \tag{2.2}$$

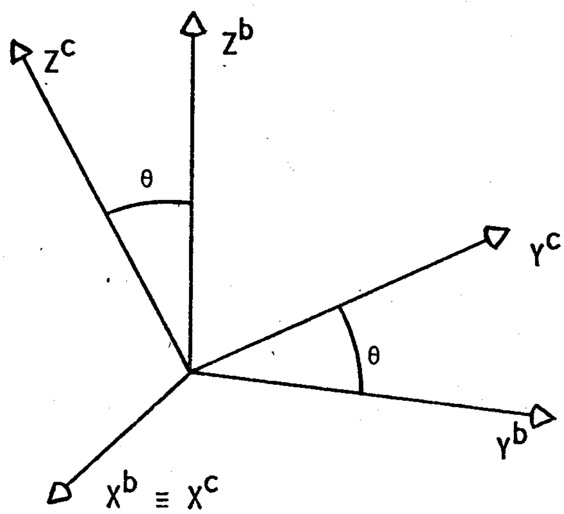

Fig. 2.1 - Rotação sobre o eixo X^b.

Analogamente, se a rotação for efetuada sobre o eixo Y^b ou Z^b, as matrizes resultarão, respectivamente, em:

$$\underline{R}^y(\theta) = \begin{vmatrix} \cos\theta & 0 & -\text{sen}\,\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \text{sen}\,\theta & 0 & \cos\theta \end{vmatrix}, \tag{2.3}$$

$$\underline{R}^z(\theta) = \begin{vmatrix} \cos\theta & \text{sen}\,\theta & 0 \\ -\text{sen}\,\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}. \tag{2.4}$$

Note-se que a forma das matrizes só depende do eixo sobre o qual se efetua a rotação. Justamente por isso não é necessário descrever a rotação que foi feita sobre o eixo X^b, bastando que se indique a letra x superior. Algumas propriedades úteis das matrizes de rotação podem ser encontradas em: Goldstein (1973) e Deutsch (1963).

2.2 - SISTEMAS DE COORDENADAS

Serão adotados aqui, em essência, 5 sistemas de referência, inter-relacionados pelos elementos orbitais, posição do Sol, orien tação e geometria do satélite. Os três primeiros são geocêntricos; o quarto é fixo na estrutura do satélite; e o quinto tem sua origem centrada num elemento de superfície externa do satélite.

2.2.1 - SISTEMA GEOCÊNTRICO INERCIAL - $X^iY^iZ^i$

No sistema inercial os eixos X^i e Y^i estão contidos no plano do equador terrestre, com o eixo X^i coincidindo com a interseção do plano da eclítica (plano da órbita do Sol em relação à Terra) e com o plano do equador. O eixo Z^i aponta para o Pólo Norte. (Figura 2.2).

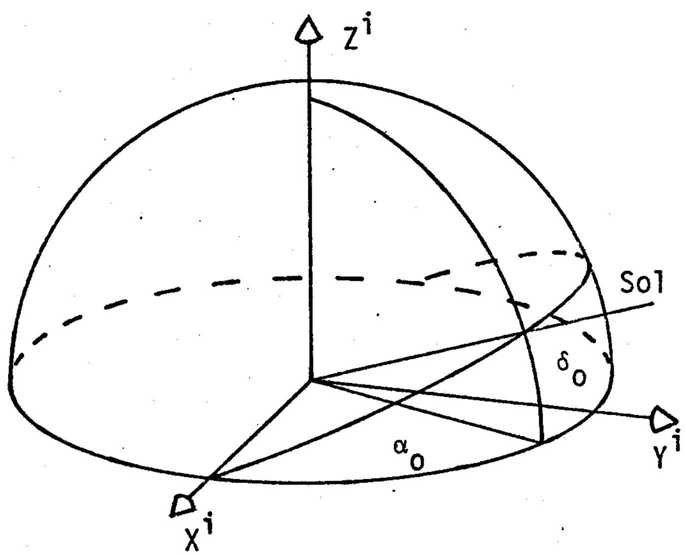

Fig. 2.2 - Sistema de referência geocêntrico inercial.

Os ângulos α_o e δ_o, ascensão reta e declinação do Sol, numa determinada data, fornecem o vetor posição do Sol no sistema inercial, $\bar{r}_o^i$,

$$\bar{r}_o^i = d_o(\cos \alpha_o \cos \delta_o \; \bar{i}^i + \cos \delta_o \text{ sen } \alpha_o \; \bar{j}^i + \text{sen } \delta_o \; \bar{k}^i), \qquad (2.5)$$

onde $\bar{i}^i$, $\bar{j}^i$ e $\bar{k}^i$ são os versores unitários no sistema geocêntrico inercial, e d_o é a distância Terra-Sol.

$$r^o = R^z(\omega) \cdot R^x(i) \cdot R^z(\Omega) \, r^i$$

$$r^o = \begin{bmatrix} c\Omega c\omega - s\Omega ci s\omega & s\Omega c\omega + c\Omega ci s\omega & si s\omega \\ -c\Omega s\omega - s\Omega ci c\omega & -s\Omega s\omega + c\Omega ci c\omega & si c\omega \\ s\Omega si & -c\Omega si & ci \end{bmatrix} r^i$$

2.2.2 - SISTEMA GEOCÊNTRICO ORBITAL - $X^oY^oZ^o$

O sistema orbital aqui definido tem sua origem no centro da Terra, com o eixo Z^o passando pela origem do sistema do satélite e Y^o perpendicular ao plano da órbita, com o sentido da velocidade angular orbital do satélite (Figura 2.3).

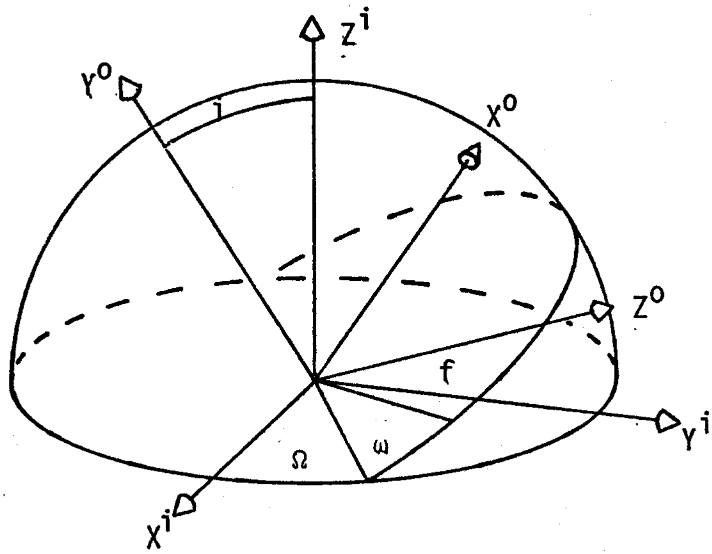

Fig. 2.3 - Sistema geocêntrico orbital.

A relação que une o sistema geocêntrico inercial com o sistema orbital será:

$$\bar{r}^o = \underline{R}^x(\pi/2)\ \underline{R}^z(\pi/2)\ \underline{R}^z(\omega + f)\ \underline{R}^x(i)\ \underline{R}^z(\Omega)\ \bar{r}^i, \tag{2.6}$$

onde $\bar{r}^i$ é um vetor cujas componentes são dadas no sistema inercial: Ω, a ascenção reta do nodo ascendente da órbita; i, a inclinação; ω, o argumento do perigeu; f, a anomalia verdadeira; e $\bar{r}^o$, o vetor $\bar{r}^i$ com relação ao sistema orbital. O vetor de estado do satélite (posição e velocidade) é obtido através dos elementos acima descritos juntamente com o semi-eixo maior da órbita, a; a excentricidade, e; e a anomalia média, M (Escobal, 1965).

2.2.3 - SISTEMA DO ALBEDO - $X^aY^aZ^a$

Neste sistema, também com a origem localizada no centro da Terra, o eixo Z^a passa pela origem do sistema do satélite; o raio vetor Terra-Sol está contido no plano formado por Y^a e Z^a (Figura 2.4), de modo a formar com Y^a um ângulo sempre menor que $\pi/2$.

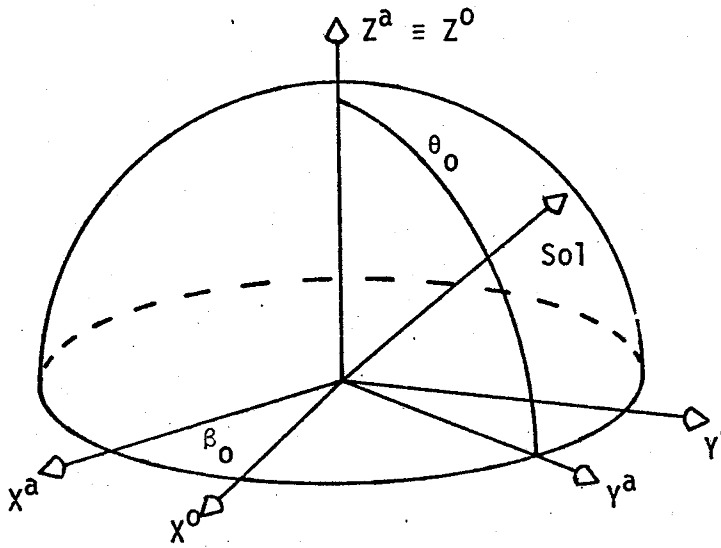

Fig. 2.4 - Sistema do albedo $X^aY^aZ^a$.

As componentes de um vetor no sistema do albedo, $\bar{r}^a$, são transformadas num vetor cujas componentes se referem ao sistema orbital, empregando-se a relação:

$$\bar{r}^o = \underline{R}^z(\beta_o)\ \bar{r}^a, \tag{2.7}$$

onde β_o é o ângulo formado por Y^o e Y^a, definido pelo seu seno e co-seno:

$$\text{sen}\ \beta_o = \frac{(\bar{k}^o \times \bar{r}_o^o) \times \bar{k}^o}{|(\bar{k}^o \times \bar{r}_o^o) \times \bar{k}^o|} \cdot \bar{i}^o, \tag{2.8.a}$$

$$\cos \beta_o = \frac{(\bar{k}^o \times \bar{r}_o^o) \times \bar{k}^o}{|(\bar{k}^o \times \bar{r}_o^o) \times \bar{k}^o|} \cdot \bar{j}^o, \tag{2.8.b}$$

onde $\bar{r}_o^o$ é o vetor Terra-Sol com componentes no sistema orbital, obtido a partir de $\bar{r}_o^i$, utilizando-se a Equação 2.6.

2.2.4 - SISTEMA DO SATÉLITE - $X^sY^sZ^s$

Este sistema tem sua origem fixada no satélite, em relação ao qual deverá ser descrita sua geometria e fornecidos os momentos de inércia, juntamente com as coordenadas do seu centro de massa.

A orientação do satélite com relação a outro sistema XYZ será dada em função dos ângulos de Euler, ϕ_s, θ_s e ψ_s, apresentados na Figura 2.5. A equação que relaciona os dois sistemas é

$$\bar{r}^s = R^z(\psi_s)\ R^x(\theta_s)\ R^z(\phi_s)\ \bar{r}. \tag{2.9}$$

O sistema XYZ pode representar o sistema inercial ou o orbital, caso, respectivamente, o satélite seja controlado inercialmente (a maior parte dos satélites atuais) ou tenha sua orientação como função da vertical local (satélite estabilizado por gradiente de gravidade, por exemplo). Logo, dado um vetor com componentes no sistema inercial, $\bar{r}^i$, se ϕ_s, θ_s e ψ_s forem as rotação angulares relativas a este sistema, então as componentes do vetor no sistema do satélite serão:

$$\bar{r}^s = R^z(\psi_s)\ R^x(\theta_s)\ R^z(\phi_s)\ \bar{r}^i. \tag{2.10}$$

Se inicialmente o vetor for dado no sistema do albedo,

$$\bar{r}^s = R^z(\psi_s)\ R^x(\theta_s)\ R^z(\phi_s)\ R^z(-\Omega)\ R^x(-i)\ R^z(-\omega - f)$$
$$R^z(-\pi/2)\ R^x(-\pi/2)\ R^z(\beta_o)\ \bar{r}^a. \tag{2.11}$$

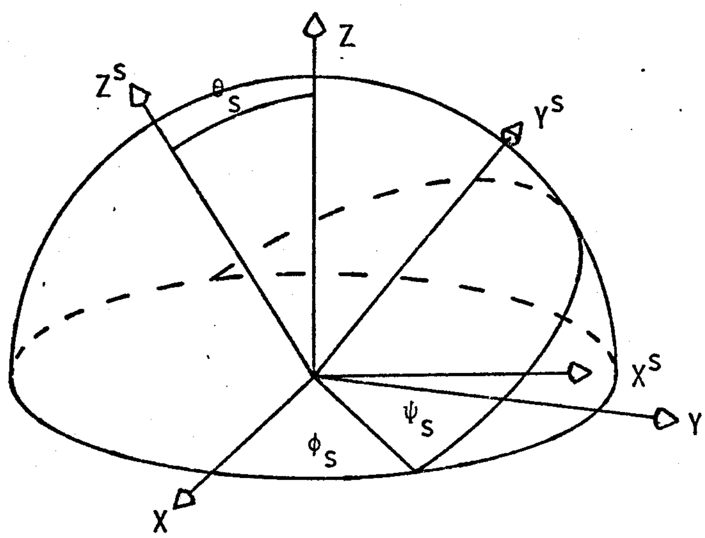

Fig. 2.5 - Sistema do satélite $X^sY^sZ^s$.

No caso de a orientação do satélite ser fornecida em relação ao sistema orbital, a relação que transforma $\bar{r}^i$, com componentes no sistema inercial, nas componentes fornecidas com relação ao sistema do satélite é:

$$\bar{r}^s = R^z(\psi_s)\ R^x(\theta_s)\ R^z(\phi_s)\ R^x(\pi/2)\ R^z(\pi/2)$$

$$R^z(\omega + f)\ R^x(i)\ R^z(\Omega)\ \bar{r}^i. \qquad (2.12)$$

Caso as componentes do vetor inicial sejam fornecidas em relação ao sistema do albedo, terão no sistema do satélite o seguinte valor:

$$\bar{r}^s = R^z(\psi_s)\ R^x(\theta_s)\ R^z(\phi_s)\ R^z(\beta_o)\ \bar{r}^a. \qquad (2.13)$$

2.2.5 - SISTEMA DO ELEMENTO DE SUPERFÍCIE - $X^eY^eZ^e$

Esse sistema tem o eixo Z^e normal a um elemento de superfície externa do satélite; os eixos Y^e e X^e contidos no plano do elemento, de tal forma que $\bar{u}^s$, uma direção conhecida em relação ao sistema do satélite, esteja contida no plano Z^eY^e (Figura 2.6).

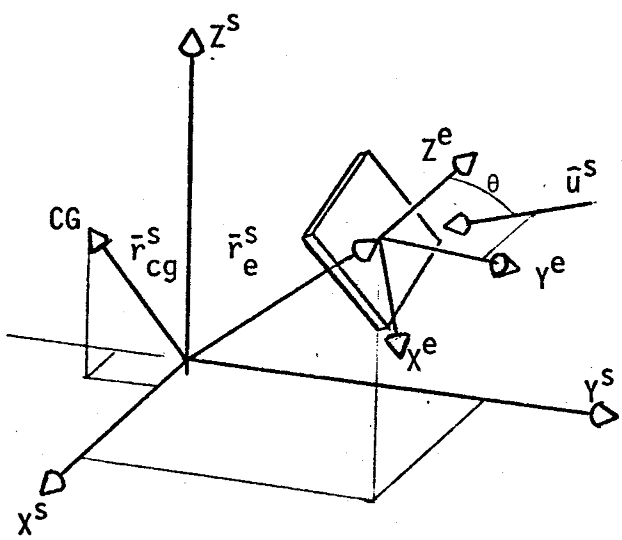

Fig. 2.6 - Sistema do elemento de superfície.

A direção $\hat{j}^e$ pode ser colocada em termos da normal ao elemento, $\hat{k}^e$, e do versor $\hat{u}^s$:

$$\hat{j}^e = \frac{(\hat{u}^s \times \hat{k}^e)}{|(\hat{u}^e \times \hat{k}^e)|} \times \hat{k}^e \tag{2.14}$$

ou

$$\hat{j}^e = -\text{cotg}\ \theta\ \hat{k}^e - \text{cossec}\ \theta\ \hat{u}^s. \tag{2.15}$$

Com estes sistemas e com as rotações indicadas, podem ser obtidas as forças e torques em qualquer sistema, embora normalmente se desejem os torques no sistema do satélite - para o estudo do controle, simulação e estimação da atitude - e as forças no sistema orbital, o que torna mais fácil a integração analítica ou numérica da órbita.

CAPÍTULO 3

FORÇA E TORQUE AERODINÂMICOS

3.1 - INTRODUÇÃO

A força aerodinâmica é normalmente predominante em satélites com perigeu menor que 1000 km sobre a superfície terrestre. Embora seu módulo diminua exponencialmente com a altura (aproximadamente a 800 km iguala-se a pressão de radiação, e aos 1500 km seus efeitos são praticamente desprezíveis), é ainda a principal responsável pelo decaimento da órbita e, portanto, pelo tempo de vida do satélite. Além disso, é no perigeu que esta força atinge seu máximo e, por ter sua resultante atuando quase no sentido contrário à velocidade do satélite, ocorre uma perda de energia da órbita mais acentuada neste ponto. Perdendo velocidade no perigeu, a altura do apogeu decai numa proporção muito mais alta que o primeiro, diminuindo com isso a excentricidade da órbita, tornando-a gradativamente circular no decorrer do tempo de vida (King-Hele, 1964).

Devido à atmosfera muito rarefeita nas altas altitudes, a mecânica dos meios contínuos não pode ser usada na determinação das forças aerodinâmicas, mas sim a teoria molecular dos gases. O parâmetro que indica se o meio é contínuo ou rarefeito é o número de Knudsen, dado pela razão entre o caminho livre médio das moléculas (a distância média percorrida por uma molécula da atmosfera entre duas colisões moleculares sucessivas) e o comprimento característico do corpo. Baseando-se em evidências experimentais, um processo onde o número de Knudsen é maior que 0,1 é classificado como rarefeito.

O fluxo de um gás rarefeito é principalmente governado pela equação de Boltzmann, uma equação diferencial-integral não-linear. A maior dificuldade em obter a solução de tal equação é devida às integrais de colisão. Felizmente as colisões intermoleculares podem ser completamente desprezadas para número de Knudsen maiores que 10, devendo ser considerada apenas as colisões entre as moléculas e a superfície. Para altitudes orbitais típicas e para a maioria dos satélites, o caminho livre médio é muito superior ao comprimento característico, resultando em um número de Knudsen notadamente maior que 10, como pode ser visto na Figura 3.1.

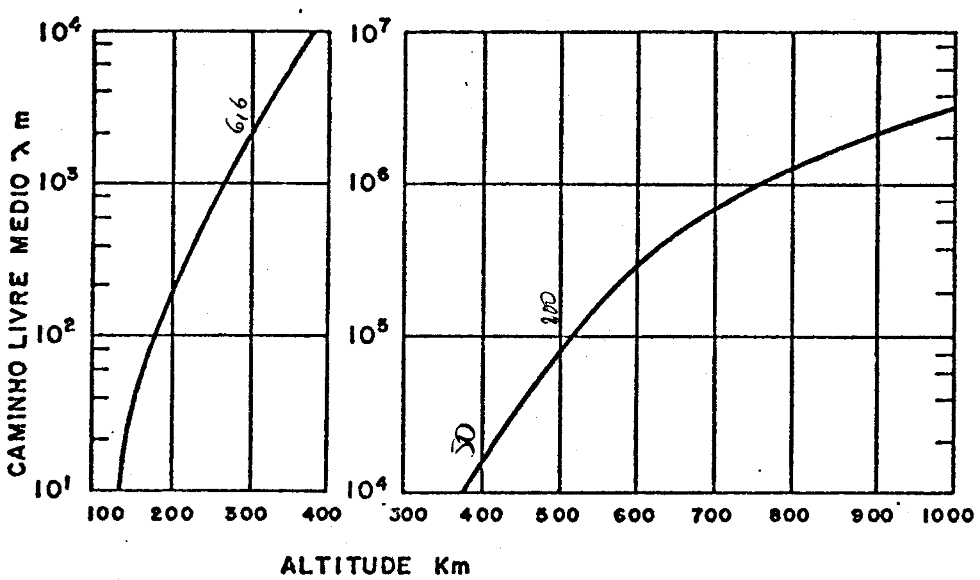

Fig. 3.1 - Caminho livre médio em função da altura.

FONTE: United States Air Force (1976).

Em contrapartida, a interação entre o gás e a superfície ou colisão, como será tratada aqui, é um fenômeno complexo, estudado na literatura por muitos autores, mas ainda sem resultados práticos.

3.2 - A INTERAÇÃO ENTRE O GÁS E A SUPERFÍCIE

As moléculas do gás rarefeito incidem com certa velocidade na superfície, interagem com uma fina camada superficial desta e são então reemitidas para o meio. A completa descrição do fenômeno envolve a especificação da função de distribuição de velocidade das moléculas refletidas e, devido à natureza complexa do fenômeno, a interação entre o gás e a superfície está longe de ser perfeitamente compreendi da e de ter resultados conclusivos. Boettcher (1979), inspecionando trabalhos referentes a esta interação (predominantemente publicados em International Symposium on Rarefied Gas Dynamics, 1968 - 1976) verificou que:

a) Poucos artigos relacionam diretamente o fenômeno ao problema das forças aerodinâmicas nos satélites.

b) Os modelos teóricos, além de requerer considerável tempo de computação, são confrontados apenas com resultados experimentais sob condições especiais criadas em laboratório, deixando parcialmente sem solução o fenômeno real de interação entre a atmosfera e a superfície do satélite.

Em virtude, portanto, de escassos resultados, tanto teóricos quanto experimentais, pertinentes ao fenômeno real, continuam sendo amplamente usados os coeficientes de acomodação α, σ e σ' introduzidos por Smoluchowski e Knudsen, de acordo com Schaaf e Chambré (1961), que descrevem a interação numa escala macroscópica.

O coeficiente de acomodação térmica, α, traduz a troca de energia entre o fluxo de gás incidente e a superfície:

$$\alpha = \frac{E_i - E_r}{E_i - E_w} . \tag{3.1}$$

E_i e E_r indicam o fluxo de energia incidente e emergente, respectivamente; E_w seria a energia emergente, caso as moléculas fossem refletidas com distribuição maxwelliana de velocidade correspondente à temperatura da superfície, T_w.

A quantidade de movimento trocada na colisão é traduzida por dois coeficientes, σ e σ', que representam respectivamente a alteração na quantidade de movimento das moléculas na direção tangencial e normal:

$$\sigma = \frac{\tau_i - \tau_r}{\tau_i} \qquad (3.2)$$

$$\sigma' = \frac{p_i - p_r}{p_i - p_w} , \qquad (3.3)$$

onde p e τ são as componentes da quantidade de movimento do fluxo na direção normal e tangencial; os índices i e r indicam o gás incidente e emergente; e p_w representa a quantidade de movimento na direção normal, quando as moléculas são refletidas com distribuição maxwelliana de velocidade e temperatura T_w.

Os valores de α, σ e σ' normalmente situam-se entre os seguintes limites:

a) Reflexão especular sem acomodação:

$$\sigma' = \sigma = \alpha = 0. \qquad (3.4.a)$$

b) Reflexão difusa com acomodação completa:

$$\sigma' = \sigma = \alpha = 1. \qquad (3.4.b)$$

Alguns valores de α e σ foram tabelados por Schaaf e Chambré (1961) e transcritos na Tabela 3.1.

TABELA 3.1

VALORES DE α E σ PARA O AR

	α	σ
Bronze usinado	0,89 - 0,93	1,00
Alumínio polido	0,87 - 0,95	...
Alumínio usinado	0,95 - 0,97	...
Vidro	...	0,89

FONTE: Schaaf e Chambré (1961).

Deve ser ressaltado, no entanto, que os valores desta tabela são aproximados e que tanto σ, σ' como α dependem da temperatura e rugosidade da superfície, pressão, temperatura e velocidade do fluxo e do ângulo de incidência, entre outros, conforme os resultados de Knechtel e Pitts, 1973. Em vista, porém, das incertezas na descrição do fenômeno de interação e na obtenção dos coeficientes, aliado ao fato de que mesmo em superfícies bastante polidas estes se mantêm altos (Tabela 3.1), admite-se que σ, σ' e α serão constantes e pré-especificados.

3.3 - EXPRESSÕES PARA FORÇA E TORQUE NUM ELEMENTO

A teoria molecular dos gases foi desenvolvida progressivamente, e Maxwell, Boltzmann, Enskog, Jeans, Burnett, Chapman entre outros estão associados a este desenvolvimento (Chapman and Cowling, 1970). Esta teoria utiliza-se de dois postulados básicos:

a) Todas as propriedades do gás podem ser deduzidas a partir do movimento de suas moléculas.

b) Este movimento pode ser predito utilizando-se apenas a Mecânica Clássica.

Ao lado destas hipóteses, serão feitas ainda as seguintes suposições (Schaaf e Chambré, 1961):

a) Serão desprezadas as colisões intermoleculares nas altitudes orbitais.

b) O caminho livre médio das moléculas emergentes, após colidir com a superfície, também é superior à dimensão característica do satélite. Desta forma, será possível tratar separadamente os efeitos das partículas incidentes e refletidas.

c) A atmosfera pode ser representada por um gás composto de um único elemento, cuja massa molecular é igual à massa molecular média local da atmosfera.

d) O fluxo de gás incidente está em equilíbrio com distribuição maxwelliana de velocidade.

e) Não serão consideradas as colisões em que as partículas colidem mais de uma vez com a superfície. (múltipla - reflexão)

A probabilidade de uma molécula estar numa dada posição e ter exatamente uma dada velocidade $\bar{v}$ é zero. Assim, é necessário usar uma função de distribuição, que defina o número de partículas num pequeno volume as quais possuam velocidade dentro de um intervalo centrado em uma dada velocidade. A quantidade fundamental que descreve as propriedades do gás é a função de distribuição de velocidades. O número mais provável de moléculas que num instante t ocupam, com relação a um sistema carteziano XYZ, o volume limitado por x e x + dx, y e y + dy e z e z + dz e que possuem velocidade entre v_x e $v_x + dv_x$, v_y e $v_y + dv_y$ e v_z e $v_z + dv_z$, é dado por $f(x, y, z, v_x, v_y, v_z, t)\, dxdydzdv_xdv_ydv_z$. Uma vez conhecida a função de distribuição de velocidade, todas as outras propriedades do gás (tais como densidade, velocidade média, temperatura e pressão) podem ser determinadas.

Em condições de equilíbrio e na ausência de forças externas, a função de distribuição torna-se (Chapman and Cowling, 1970; Lee et alii, 1963):

$$f_i(\bar{v}) = \frac{\rho_i}{m}\left(\frac{m}{2\pi kT_i}\right)^{3/2} e^{-\left[\frac{m}{2\pi kT_i}(\bar{v}-\bar{u})^2\right]} , \qquad (3.5)$$

onde ρ_i é a densidade do gás; k, a constante de Boltzmann; T_i, a temperatura do gás; e m, a massa de uma molécula, dada por:

$$m = \bar{M}/N_a , \qquad (3.6)$$

onde $\bar{M}$ é a massa molecular média do gás e N_a é o número de Avogrado. Finalmente, $\bar{u}$ é a velocidade média ou velocidade de corrente das moléculas, relativo ao referencial XYZ.

Considere-se agora um elemento de superfície com área dA (Figura 3.2), com um sistema de coordenadas fixo no seu centro geométrico e com o eixo Z^e coincidindo com a normal ao elemento. A quantidade de movimento na direção normal, trocada entre o gás e a superfície durante a colisão, vale:

$$p_n = p_i + p_r \, , \tag{3.7}$$

ou, isolando-se p_r da Equação 3.4 e substituindo-o na Equação 3.7, tem-se:

$$p_n = (2 - \sigma') \, p_i + \sigma' p_w \, . \tag{3.8}$$

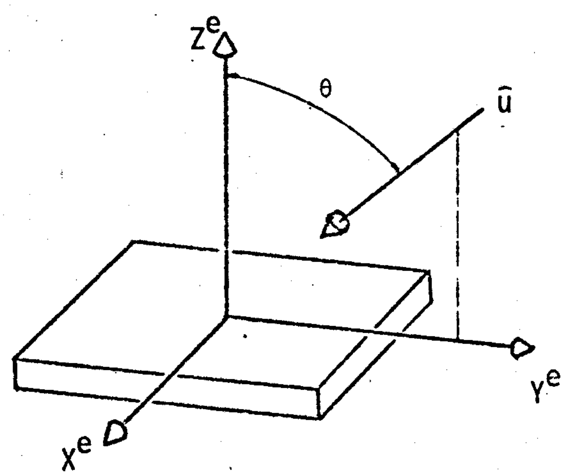

Fig. 3.2 - Sistema de coordenadas no elemento.

O fluxo de quantidade de movimento devido às moléculas incidentes, $\bar{P}$, que atinge a superfície por unidade de tempo e por unidade de área, é igual à pressão atuante neste elemento e vale:

$$\bar{P} = \int_{v_x=-\infty}^{\infty} \int_{v_y=-\infty}^{\infty} \int_{v_z=-\infty}^{0} m \, \bar{v} \, f_i \, v_z \, dv_x \, dv_y \, dv_z \, , \tag{3.9}$$

cuja componente normal, P_i, é

$$P_i = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{0} m\, v_z\, f_i\, v_z\, dv_x\, dv_y\, dv_z \,. \tag{3.10}$$

Da mesma forma, a pressão normal devida às moléculas emergentes, P_w, com temperatura igual à da superfície, T_w, será

$$P_w = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{0}^{\infty} m\, v_z\, f_w\, v_z\, dv_x\, dv_y\, dv_z \,, \tag{3.11}$$

onde ρ_w, da expressão de f_w, é calculado a partir da imposição de serem iguais os números de partículas incidentes e emergentes.

Efetuando-se a integração indicada por P_i e P_w e lembrando-se que a pressão guarda, com relação à quantidade de movimento, uma relação idêntica à da Equação 3.8, tem-se que a pressão atuante no elemento na direção normal vale:

$$P_n = \frac{\rho_i |\bar{u}^s|^2}{2s^2} \left\{ e^{-s^2 \cos^2\theta} \left[\frac{(2-\sigma')}{\sqrt{\pi}}\, s\cos\theta + \frac{\sigma'}{2} \sqrt{\frac{T_w}{T_i}} \right] + \right.$$

$$+ [1 + \mathrm{erf}(s\cos\theta)] \left[(2-\sigma') \left(\frac{1}{2} + s^2 \cos^2\theta \right) + \right.$$

$$\left. \left. + \frac{\sigma'}{2} \sqrt{\pi} \sqrt{\frac{T_w}{T_i}}\, s\cos\theta \right] \right\} , \tag{3.12}$$

onde:

$$\cos\theta = -\,\hat{u}^s \,.\, \bar{k}^e \,, \tag{3.13}$$

em que $\hat{u}^s$ é o versor de direção de $\bar{u}^s$, velocidade da atmosfera com relação ao satélite, no sistema do satélite. Por sua vez, $\bar{u}^s$ é obtido a partir da velocidade da atmosfera relativa ao satélite no sistema inercial:

$$\bar{u}^i = \bar{v}_a^i - \bar{v}_s^i \,, \tag{3.14}$$

efetuando-se as rotações indicadas pelas Equações 2.10 ou 2.12. $\bar{v}_s^i$ é a velocidade do satélite com relação ao referencial inercial, obtida em função dos elementos keplerianos no instante considerado (Deutsch, 1963; Brower and Clemence, 1961 e Escobal, 1965 trazem as relações necessárias) e $\bar{v}_a^i$ é a velocidade da atmosfera no sistema inercial. Esta última, entretanto, é pouco conhecida em virtude das escassas informações disponíveis sobre a real velocidade da alta atmosfera (King-Hele, 1964) e, embora usualmente seja considerada nula, é mais realístico supor que ela tenha a mesma velocidade de rotação da Terra:

$$\bar{v}_a^i = \bar{w}_t^i \times \bar{r}_s^i , \tag{3.15}$$

onde $\bar{w}_t^i$ é a velocidade angular de rotação da Terra e $\bar{r}_s^i$ é o raio vetor do satélite, ambos no sistema inercial.

A razão de velocidade, s, é obtida de

$$s = \frac{|\bar{u}^s|}{\sqrt{\frac{2\,kT_i}{m}}} , \tag{3.16}$$

e a função erro é definida como:

$$\mathrm{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-y^2}\, dy. \tag{3.17}$$

Analogamente, na direção tangencial a quantidade de movimento trocada é:

$$\tau = \tau_i - \tau_r = \sigma \tau_i . \tag{3.18}$$

A força por unidade de área, devida às moléculas incidentes na direção tangencial, será então:

$$P_t = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{0} m\, v_y\, f_i\, v_z\, dv_x\, dv_y\, dv_z \tag{3.19}$$

que, integrada, resulta em:

$$P_t = \frac{\rho_i |\bar{u}^s|^2}{2} \frac{\sigma}{s\sqrt{\pi}} \operatorname{sen}\theta \left\{ e^{-s^2\cos^2\theta} + \right.$$

$$\left. + \sqrt{\pi}\, s \cos\theta . [1 + \operatorname{erf}(s \cos\theta)] \right\} . \tag{3.20}$$

A presença do termo T_w/T_i na Expressão 3.12 indica que a temperatura do elemento de superfície deverá ser obtida resolvendo-se as equações de transmissão de calor, o que normalmente é difícil por envolver equações diferenciais de segunda ordem, com geração interna de calor (aquecimento pelos raios solares e correntes elétricas, dissipação por irradiação) e transferência de energia efetuada pelas moléculas da atmosfera. Porém, a influência de T_w/T_i no cálculo das forças é pequena por se tratar apenas das moléculas refletidas difusamente, não excedendo a 10% de variação, quando T_w/T_i varia de 0,1 a 1,0. É comum, portanto, a adoção da relação como uma constante fornecida.

A força aerodinâmica no elemento será dada por:

$$d\bar{F}_a^s = -P_n dA\, \bar{k}^e - P_t\, dA\, \bar{j}^e . \tag{3.21}$$

Substituindo-se a Relação 2.13 na Equação 3.21, tem-se:

$$d\bar{F}_a^s = (P_t \operatorname{cotg}\theta - P_n)\, dA\, \bar{k}^e + P_t \operatorname{cossec}\theta\, dA\, \hat{u}^s . \tag{3.22}$$

Essa expressão fornece a força aerodinâmica atuante num elemento de área dA, projetada nas direções $\bar{k}^e$, normal ao elemento e $\hat{u}^s$, velocidade da atmosfera com relação ao satélite.

O torque aerodinâmico resulta em:

$$d\bar{M}_a^s = (\bar{r}_e^s - \bar{r}_{cg}^s) \times d\bar{F}_a^s , \tag{3.23}$$

onde $\bar{r}^s_e$ é o raio vetor do centro do elemento à origem do sistema do satélite, e $\bar{r}^s_{cg}$ é o vetor posição do centro de gravidade (Figura 2.6).

As equações aqui obtidas são aplicáveis apenas a elementos planos. É raro, porém, encontrar satélites onde todas as suas superfícies externas sejam planas. No caso de superfícies curvas (como um cilindro, por exemplo), pode-se subdividi-las em inúmeros elementos infinitesimais, tal que cada um deles seja razoavelmente plano.

A resultante das forças, $\bar{F}^s_a$, será então a integral das forças elementares, $d\bar{F}^s_a$, sobre toda a superfície externa do satélite.

A componente da resultante na direção da velocidade de corrente, $\hat{u}^s$, define o coeficiente de arrasto aerodinâmico:

$$C_{DA} = \frac{\bar{F}^s_a \cdot \hat{u}^s}{1/2\,\rho_i\,\bar{u}^{s2}\,A_r}\,, \tag{3.24}$$

onde A_r é uma área de referência qualquer do satélite, e o coeficiente de sustentação:

$$C_{DL} = \frac{|\bar{F}^s_a \times \hat{u}^s|}{1/2\,\rho_i\,\bar{u}^{s2}\,A_r}\,. \tag{3.25}$$

Na realidade este coeficiente, assim definido, é uma combinação do coeficiente de sustentação com o coeficiente de força lateral, definidos na literatura aeronáutica. Justifica-se entretanto o modo como foi definido aqui, visto que não há, na maioria dos satélites, uma direção preferencial para a sustentação.

Analogamente à força, também podem ser definidos coeficientes para o torque. Entretanto a resultante dos torques não está, como a força, necessariamente numa direção próxima ao vetor velocidade; por isso o coeficiente de torque deverá ser definido de outra forma. Já que o conhecimento do torque é útil no controle e simulação da atitude, é natural que seu coeficiente seja fornecido no próprio sistema do satélite, decomposto nas direções X^s, Y^s e Z^s:

$$C_{MAX} = \frac{\bar{M}_a^s \cdot \bar{i}^s}{1/2\, \rho_i\, \bar{u}^{s^2}\, A_r\, L_r}, \tag{3.26}$$

$$C_{MAY} = \frac{\bar{M}_a^s \cdot \bar{j}^s}{1/2\, \rho_i\, \bar{u}^{s^2}\, A_r\, L_r}, \tag{3.27}$$

$$C_{MAZ} = \frac{\bar{M}_a^s \cdot \bar{k}^s}{1/2\, \rho_i\, \bar{u}^{s^2}\, A_r\, L_r}, \tag{3.28}$$

que fornecem as três componentes do coeficiente de torque, onde $\bar{M}_a^s$ é a resultante do torque aerodinâmico e L_r é um comprimento característico do satélite.

As expressões de C_{DA} e C_{DL} foram integradas analiticamente em corpos convexos simples, tais como esfera, cilindro, cone, corpos compostos em vários artigos (Stalder and Zurick, 1951; Schaaf and Chambré, 1961) e comparados com resultados experimentais (Stalder et alii, 1950; Boettcher and Legge, 1980) com grande compatibilidade entre teoria e experimentos. Poucos artigos, porém, tratam de superfícies côncavas (Chahine, 1961) ou de superfícies convexas de um modo geral (Boettcher, 1979; Fredo and Kaplan, 1981).

A dificuldade da integração analítica das forças e torques aerodinâmicos, à medida que o grau de complexidade do formato externo do satélite aumenta, é óbvia, ainda mais se for considerado que a maioria dos satélites atuais não possuem formatos tão simples. Torna-se necessário então a integração numérica; neste sentido foi construída uma sub-rotina que calcula a força e o torque aerodinâmico para um satélite cuja geometria deve ser fornecida por outra sub-rotina. No Apêndice A faz-se uma comparação entre os resultados da integração ana lítica com a numérica para um cilindro e uma esfera, em função das variáveis envolvidas e do número de partes em que ambos são divididos.

Finalmente, a densidade atmosférica pode ser obtida a partir de modelos atmosféricos fornecidos por COSPAR (1972) ou United States Air Force (1976), ou mesmo de sub-rotinas numéricas como ADEN (Jacchia, 1972) ou ATDENS (Negreiros de Paiva, 1979; Jacchia, 1971; Roberts, 1971).

CAPÍTULO 4

FORÇAS DE RADIAÇÃO

4.1 - INTRODUÇÃO

Os fótons, ao incidirem na superfície externa do satélite, são refletidos ou absorvidos por esta; nesse processo ocorre uma mudança na quantidade de movimento, que se traduz por uma força e por um torque no satélite. As principais fontes de radiação que se mostram capazes de alterar os elementos orbitais do satélite são o Sol e a Terra. Ao Sol será feita a referência de radiação solar direta ou, simplesmente, de radiação solar, ao passo que à Terra ter-se-á a radiação refletida difusamente, ou albedo terrestre, e a radiação ou reemissão terrestre.

Por ser inversamente proporcional à distância da fonte emissora, a força atuante no satélite devido à radiação solar é 7% menor quando a Terra passa do periélio para o afélio. Como praticamente independe da altitude (caso seja desprezada a parcela absorvida pela atmosfera e as pequenas variações na distância do Sol ao longo de uma órbita), a força de radiação solar atinge a magnitude da aerodinâmica, sob condições atmosféricas normais, a partir dos 700 km. Sua influência nos elementos orbitais é maior na excentricidade, mas, conforme a geometria da órbita, pode alterar também o semi-eixo maior. Chega mesmo a diminuir a altura do perigeu, contribuindo para o encurtamento do tempo de vida (Musen, 1960). O equacionamento das forças de radiação foi baseado na formulação proposta por Evans (1964) e Georgevic (1973a), em virtude da grande semelhança entre o método de integração destas e das forças aerodinâmicas.

A radiação solar refletida difusamente pela Terra, ou albedo, mantém sua magnitude quase invariável com a altitude pois o efeito de afastamento (quando se incrementa a altura) é compensado pela maior área terrestre visível. Em satélites de inclinação moderada, o albedo provoca uma diminuição dos efeitos da radiação solar direta, pois age em sentido contrário a esta, raramente ultrapassando 10% de sua magnitude. Poucos artigos tratam o albedo de forma sistemática, sem grandes aproximações. Cunningham, (1963a, 1963b) obtém a expressão da força devido ao albedo numa placa plana girante, e de uma forma que, durante a integração numérica, possa se fazer uso das expressões da radiação solar direta. Outros artigos tratam o albedo por meio de fatores de forma (Clark and Anderson, 1965; Bannister, 1965), com pouca aplicabilidade num caso geral, onde a geometria do satélite tem importância fundamental.

Da mesma forma que o albedo, a radiação ou reemissão terrestre varia pouco com a altitude. Seus efeitos são ainda menores que os do albedo, já que seu módulo é praticamente constante, não importando se o satélite está no lado iluminado ou não. Além disso a força resultante atua bastante próxima à vertical local, a não ser em satélites altamente assimétricos, o que diminui ainda mais os efeitos da reemissão. Justamente em virtude desta pouca influência, poucos artigos fazem menção à sua obtenção (Clark and Anderson, 1965; Abadie, 1968).

Embora as forças de radiação tenham a mesma origem, sua formulação difere substancialmente em cada caso; por isso é necessário tratá-las separadamente.

4.2 - RADIAÇÃO SOLAR DIRETA

As hipóteses que serão feitas para a radiação solar serão mais bem compreendidas introduzindo-se o conceito de intensidade de radiação (Sparow and Cess, 1978; Kreith, 1962). Considere-se então um elemento de área dA_1, fixo num sistema de eixos, tal que sua normal coincida com a direção $\hat{k}$ (Figura 4.1). Seja d^5E a quantidade de energia que deixa dA_1 num intervalo de tempo dt, numa direção $\hat{\Omega}$, confinada num ângulo sólido $d\Omega$ centrado em P. O versor normal, $\hat{k}$, faz com $\hat{\Omega}$ um ângulo θ. Resultados experimentais indicam que a razão

$$\frac{d^5E}{\cos\theta \, dA_1 \, d\Omega \, dt} \tag{4.1}$$

tende a um valor finito para um dado ponto P e para uma dada direção $\hat{\Omega}$ quando dA_1, $d\Omega$ e $d\lambda$ tendem a se anular, em qualquer ordem.

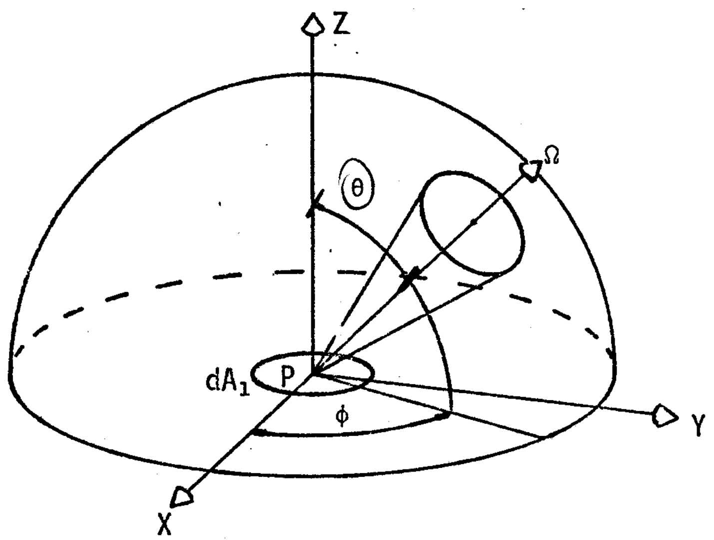

Fig. 4.1 - Instensidade de radiação.

Este limite será denominado intensidade de radiação no ponto P, na direção $\hat{\Omega}$, e denotado por I. Então

$$I = \lim_{\substack{dA \to 0 \\ d\Omega \to 0 \\ d\lambda \to 0}} \frac{d^5E}{\cos\theta \, dA_1 \, d\Omega \, d\lambda} . \qquad (4.2)$$

Note-se aqui que a energia é emitida ao longo de uma faixa de comprimentos de onda; portanto I representa a integral da intensidade de radiação monocromática sobre o comprimento de onda. Cabe observar, também, que $dA_1 \cos\theta$ representa a projeção da área dA_1 numa direção normal a $\hat{\Omega}$, tornando dessa forma a definição de I independente da orientação de dA_1. A quantidade de energia por unidade de tempo e de área que deixa dA, S_1, vale portanto

$$S_1 = \int_H I \cos\theta \, d\Omega, \qquad (4.3)$$

onde H indica integração sobre um hemisfério. Usando-se coordenadas esféricas (Figura 4.1), tem-se:

$$S_1 = \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi/2} I(\theta,\ \phi)\ \cos\theta\ \operatorname{sen}\theta\ d\theta\ d\phi. \qquad (4.4)$$

Neste ponto é comum supor que a intensidade de radiação, I, é isotrópica, ou seja, não depende de θ ou ϕ. Logo,

$$S_1 = \pi I. \qquad (4.5)$$

O fato de a intensidade de radiação independer da direção de emissão faz com que o Sol se assemelhe a um disco de luminosidade uniforme, tanto no centro quanto nos bordos, quando visto da Terra. Essa característica, associada à pequena distância angular do Sol medida na superfície terrestre (aproximadamente $0{,}53^{o}$ no equador solar), fornece elementos para considerar o Sol como um elemento de área plano que irradia uniformemente. Assim, por simetria, este elemento está sempre com sua face voltada para o elemento receptor. A potência incidente por unidade de área numa superfície perpendicular à linha que une seu centro ao centro do Sol, situada a uma distância R do disco solar, vale:

$$S = \frac{S_1}{\pi}\ \frac{A_2}{R^2}, \qquad (4.6)$$

onde S_1 é a potência por unidade de área emitida pelo disco solar, de área A_1.

A potência S é chamada constante solar; para a distância média da Terra ao Sol, $R_o = 149 \times 10^9$ m vale:

$$S_o = 1353 \text{ watts/m}^2. \qquad (4.7)$$

Esse valor se mantém aproximadamente constante, sofrendo apenas pequenas variações conforme a atividade solar. A potência por unidade de área num ponto qualquer do espaço, cuja distância ao Sol é R metros, pode ser obtida em função de S_o:

$$S = S_o \frac{R_o^2}{R^2} . \tag{4.8}$$

A pressão devida à radiação solar incidente que atua neste ponto é dada por:

$$p_s = \frac{S_o R_o^2}{c} \frac{1}{R^2} = \frac{K}{R^2} , \tag{4.9}$$

ond. c é a velocidade da luz. A constante K vale (Georgevic, 1973a):

$$K = 1{,}011 \ . \ 10^{17} \ N. \tag{4.10}$$

Num caso genérico, a radiação incidente é parte refletida e parte absorvida (supõe-se aqui que a superfície seja opaca); a parcela refletida pode ainda ser refletida especular ou difusamente. Diz-se que a reflexão é especular quando o ângulo de incidência é igual ao ângulo de reflexão, com os raios incidente, refletido e normal contidos num mesmo plano; diz-se que ela é difusa quando não há uma direção preferencial para a radiação emergente da superfície. As superfícies reais comportam-se aproximadamente como uma combinação de ambas as reflexões, especular e difusa. Baseando-se nisto, pode-se afirmar que uma parcela γ da radiação incidente é refletida, e uma parcela ρ desta é refletida na forma especular. Os coeficientes γ e ρ, embora variem com a temperatura da superfície, frequência da radiação incidente, ângulo de incidência, entre outros (Kreith, 1962, 1973; Sparow and Cess, 1978), serão considerados constantes aqui.

Têm-se assim dois casos limites: reflexão especular quando $\rho = 1$ e reflexão difusa quando $\rho = 0$.

A força que age num elemento de área dA, cuja normal forma um ângulo η com a direção de incidência, $\hat{s}^S$ (Figura 4.2), será proporcional à área do elemento projetada nesta direção, ou seja:

$$dF_I = p_s \, dA \cos\eta = dF_N \cos\eta \,, \tag{4.11}$$

onde dF_N é a força na direção normal.

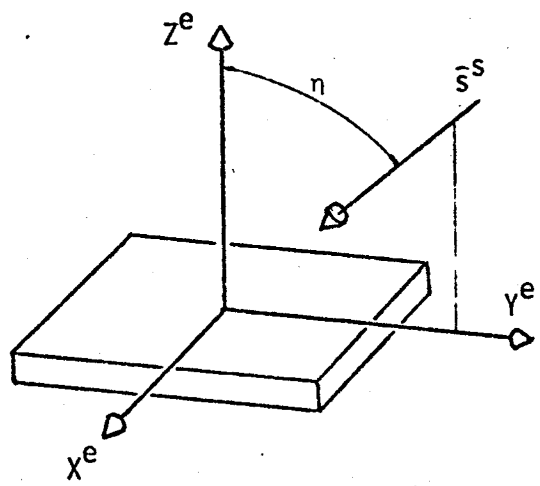

Fig. 4.2 - Sistema de referência no elemento.

Decompondo-se a Expressão 4.11 nas componentes normal e tangencial à superfície, têm-se:

$$dP_I = - \, dF_N \cos^2\eta, \tag{4.12a}$$

$$dT_I = - \, dF_N \cos\eta \, \text{sen}\, \eta \,. \tag{4.12b}$$

A força devida à radiação emergente na forma especular possui o mesmo módulo da incidente, diminuído por um fator $\gamma\rho$, que é a parcela dos fótons refletidos especularmente:

$$dP_E = - \, \gamma\rho \, dF_N \cos^2\eta, \tag{4.13a}$$

$$dT_E = \gamma\rho \, dF_N \cos\eta \, \text{sen}\, \eta \,, \tag{4.13b}$$

onde os sinais negativos nas forças indicam que estas atuam em direções contrárias aos eixos. A intensidade de radiação da parcela refletida difu samente (supondo-se que sua distribuição seja uniforme em todas as direções) será então:

$$I = \frac{\gamma}{\pi} (1 - \rho) \; S \cos \eta \, . \qquad (4.14)$$

A força que age na superfície devida à radiação refletida numa direção θ e subentendida num ângulo sólido dA_2/r^2 (Figura 4.3) torna-se:

$$dF_D = dA \, \frac{I}{c} \cos \theta \, . \, \frac{dA_2}{r^2} \qquad (4.15)$$

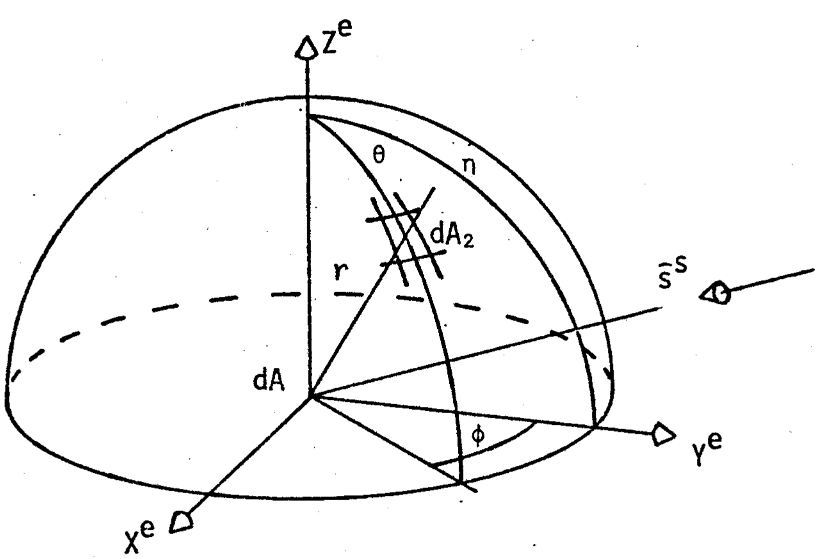

Fig. 4.3 - Radiação refletida difusamente.

que, decomposta nas direções $X^eY^eZ^e$, resulta respectivamente em:

$$dP_D = - \frac{\gamma}{\pi} (1 - \rho) \; dF_N \cos \eta \cos^2 \theta \; \text{sen}\, \theta \; d\theta \; d\phi, \qquad (4.15a)$$

$$dT_D = - \frac{\gamma}{\pi} (1 - \rho) \; dF_N \cos \eta \cos \theta \; \text{sen}\, \theta \cos \phi \; d\theta \; d\phi \qquad (4.15b)$$

$$dL_D = - \frac{\gamma}{\pi} (1 - \rho) \; dF_N \cos \eta \cos \theta \; \text{sen}\, \theta \; \text{sen}\, \phi \; d\theta \; d\phi \qquad (4.15c)$$

Integrando-se as componentes, com θ variando de 0 a $\pi/2$ e com ϕ variando de 0 a 2π, as forças T_D e L_D tornam-se nulas, e a componente normal resulta em:

$$P_D = - \frac{2}{3} \gamma \, (1 - \rho) \, dF_N \cos \eta \, . \qquad (4.16)$$

A energia emitida difusamente pela superfície será proporcional à quarta potência de sua temperatura absoluta, T_W, de acordo com a Equação de Stefan-Boltzmann:

$$S_I = \varepsilon \sigma T_W^4 \, , \qquad (4.17)$$

onde ε é a emissividade da superfície e σ é a constante de Stefan-Boltzmann.

A radiação reemitida, da mesma forma que a refletida difusamente, causa uma força apenas na direção normal:

$$dP_R = - \frac{2}{3} \frac{\varepsilon \sigma T_W^4}{c} \, dA \qquad (4.18a)$$

A obtenção de T_W, porém, envolve a resolução de equações diferenciais de troca de calor, onde fontes tais como radiação solar, atrito atmosférico, dissipação de correntes elétricas em condutores, etc, deverão ser consideradas.

Georgevic (1973a, 1973b) sugere a multiplicação da radiação absorvida por um coeficiente k, que depende das emissividades e temperaturas nos dois lados (frente e trás) da superfície. Nas superfícies adiabáticas $k = 1$, e nas superfícies que possuam a mesma emissividade e temperatura em ambos os lados $k = 0$. Entretanto, ainda assim permanece a dificuldade de obter T_W. Entretanto, a hipótese de superfícies adiabáticas é comum em satélites que não possuam painéis ou não tenham alta velocidade de rotação, já que em ambos os casos haverá uma grande diferença de temperatura entre as partes expostas à radiação e as partes encobertas. Pode-se admitir, assim, que toda a energia absorvida é reemitida instantaneamente pela superfície, com uma emitância igual à sua absortância, $1 - \gamma$, o que resulta para a força na direção normal em

$$dP_R = -\frac{2}{3}(1 - \gamma)\, dF_N \cos\eta \,. \tag{4.18b}$$

A resultante das forças na direção normal será a soma de suas componentes

$$dP_N = -\, dF_N \cos\eta \,\{(1 + \gamma\rho)\cos\eta + \frac{2}{3}[\gamma(1 - \rho) + \nu(1 - \gamma)]\}, \tag{4.19}$$

onde o coeficiente, ν, aqui introduzido vale

$$\nu = \frac{\sigma}{c}\,\frac{T_W^4\, dA}{dF_N \cos\eta}, \tag{4.20}$$

$$= \frac{\varepsilon\sigma}{\gamma c}\,\frac{T_\omega^4\, \cancel{dA}}{\rho s\, \cancel{dA} \cos\eta} = \frac{\varepsilon\sigma}{\gamma c}\,\frac{T_\omega^4}{S/2 \cos\eta} = \frac{\varepsilon}{\gamma}\,\sigma\,\frac{T_\omega^4}{S\cos\eta}$$

caso se conheça a temperatura do elemento, ou $\nu = 1$, como melhor aproximação caso T_W seja desconhecido (não calculado). Aqui também foi suposto que a emissividade da superfície é igual à sua absortância, e embora a grande parte dos materiais não possua esta característica, pode-se sempre adotar um valor médio para γ sem se esquecer, porém, de que a influência da absortância $(1 - \gamma)$ no cálculo das forças é maior que a emitância (Kreith, 1973).

$\nu < 1 \Rightarrow$ radiação incidente > irradiação emitida

$\nu > 1 \Rightarrow$ radiadores (rad. incid. < rad.

Na direção tangencial a força vale:

$$dP_T = -dF_N \cos\eta\,(1 - \gamma\rho)\,\text{sen}\,\eta \,. \tag{4.21}$$

Obtém-se, assim, a expressão da resultante (Figura 4.2):

$$d\bar{F}_R^s = dP_N\, \hat{k}^e + dP_T\, \hat{j}^e \,. \tag{4.22}$$

Substituindo-se as Equações 4.19, 4.21 na Equação 4.22 e tirando-se a direção $\hat{j}^e$ em função de $\hat{s}^s$ e $\hat{k}^e$, obtém-se:

$$d\bar{F}_R^s = - p_s \, dA \cos\eta \, \{[2\gamma\rho \cos\eta + \frac{2}{3} (\gamma(1 - \rho) +$$

$$+ \nu(1 - \gamma))] \hat{k}^e \, \cancel{\gamma} (1 - \gamma\rho) \, \hat{s}^s \} \, . \tag{4.23}$$

Esta resultante deverá ser integrada sobre toda a superfície externa do satélite, com a condição de que os elementos estejam iluminados, isto é,

$$\cos\eta = - \hat{s}^s \, . \, \hat{k}^e \geq 0 \tag{4.24}$$

Deve-se integrar o lado não-iluminado do satélite apenas quando se conhece a temperatura de cada elemento. Neste caso,

$$d\bar{F}_R^s = \frac{2}{3} \overset{\mathcal{E}}{\cancel{(1 - \gamma)}} \frac{\sigma}{c} T_W^4 \, dA \, \hat{k}^e \tag{4.25}$$

para:

$$\cos\eta \leq 0. \tag{4.26}$$

O torque elementar resulta em:

$$d\bar{M}_R^s = (\bar{r}_e^s - \bar{r}_{cg}^s) \, X \, d\bar{F}_R^s \, , \tag{4.27}$$

onde $\bar{r}_e^s$ e $\bar{r}_{cg}^s$ são os vetores posição do centro do elemento e centro de massa do satélite, respectivamente.

Analogamente à força aerodinâmica, podem ser definidos dois coeficientes; C_{RS} e C_{RL}, que representam respectivamente o coeficiente da força de radiação na direção Sol-Terra e na direção perpendicular a esta:

$$C_{RS} = \frac{\bar{F}_R^s \, . \, \hat{s}^s}{p_s \, . \, A_r} \, , \tag{4.28}$$

$$C_{RL} = \frac{|\bar{F}_R^s \times \bar{s}^s|}{p_s \cdot A_r} , \qquad (4.29)$$

onde $\bar{F}_R^s$ é a força devida à radiação integrada sobre toda a superfície do satélite, e A_r é uma área de referência qualquer.

Da mesma forma, podem ser definidos coeficientes de torques análogos aos aerodinâmicos:

$$C_{MRX} = \frac{\bar{M}_R^s \cdot \vec{i}^s}{p_s\, A_r\, L_r} , \qquad (4.30)$$

$$C_{MRY} = \frac{\bar{M}_R^s \cdot \vec{j}^s}{p_s\, A_r\, L_r} , \qquad (4.31)$$

$$C_{MRZ} = \frac{\bar{M}_R^s \cdot \vec{k}^s}{p_s\, A_r\, L_r} , \qquad (4.32)$$

onde $\bar{M}_R^s$ é integrado sobre toda a superfície e L_r é um comprimento característico do satélite.

A integração analítica de C_{RS} e C_{RL} em corpos convexos é mais fácil que a integração dos coeficientes aerodinâmicos, em virtude de não possuírem função exponencial e função erro no integrando. As expressões de C_{RS} para um cilindro e uma esfera são fornecidos no Apêndice B e comparados com a integração numérica em função do número de divisões efetuadas nos dois corpos.

Quanto a corpos côncavos, frequentemente desprezam-se múltiplas reflexões (Georgevic, 1973a,b; Evans, 1964), embora o sombreamento ou ocultação de partes do satélite por outras partes deva ser considerado.

Uma última observação refere-se à obtenção da direção de incidência, $\bar{s}^s$, no sistema do satélite. Esta é calculada a partir da posição do Sol no sistema inercial, $\hat{s}^i$, utilizando-se das Rotações 2.10 e 2.12. Quanto ao valor de $\hat{s}^i$, este pode ser tirado diretamente de Tabelas (Anuário Astronômico 1974) ou de procedimentos computacionais (Flandern and Pulkkinem, 1979; Medeiros e Kuga, 1980).

4.3 - RADIAÇÃO REFLETIDA PELA TERRA

Uma pequena parcela da energia solar que incide na Terra é absorvida pela atmosfera. A maior parte atinge a superfície, onde parte é absorvida e parte é refletida. A parcela refletida especularmente é muito pequena (Cunningham, 1963b) quando comparada com as demais, de forma que, para fins práticos, pode ser totalmente desprezada. A quantidade absorvida irá aquecer e elevar a temperatura da superfície, que assim passa a trocar calor com a atmosfera por condução e convecção, que, por sua vez transporta este calor para as regiões mais frias da Terra. Além disso, há transferência de energia por condução na própria superfície, que também emite radiação na região do infravermelho, proporcionalmente à quarta potência de sua temperatura absoluta. Considerando-se apenas os efeitos predominantes, parte da radiação solar incidente na Terra é refletida difusamente e parte é absorvida e reemitida para o espaço. A parcela da radiação refletida difusamente, ou albedo terrestre, é aproximadamente constante (varia ligeiramente com a quantidade de nuvens, as características da superfície e temperatura do local), e foi equacionada por Cunningham (1963a, 1963b, 1961).

A radiação solar refletida, juntamente com a emitida pela Terra, provocam no espaço uma pressão de radiação da mesma natureza que o Sol (embora diferindo quanto ao comprimento de onda), causando uma força e um torque no satélite.

A Terra será adotada como esférica sem que se alterem significativamente os resultados. As distâncias da ordem de grandeza do raio terrestre também serão desprezadas em comparação com a distância do Sol.

O sistema de coordenadas empregado é o sistema do albedo, definido na Seção 2.3 e representado também na Figura 4.4, onde estão indicados os ângulos ν_s (formado pela normal $\hat{n}_T$ a um elemento de área dA_T da superfície terrestre e pela direção Terra-Sol, $-\hat{s}^a$, θ e ϕ, que definem a posição desse elemento.

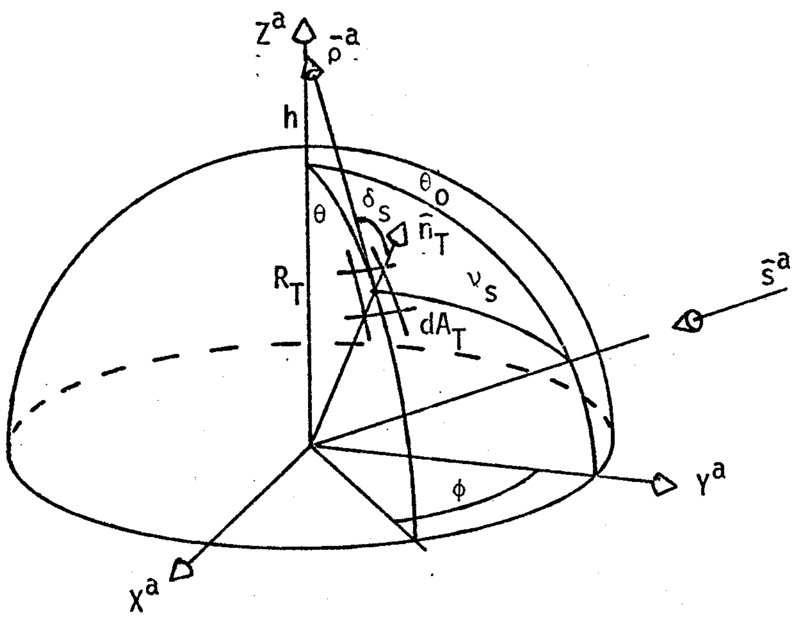

Fig. 4.4 - Ângulos no sistema do albedo.

A potência devida à radiação solar que incide em dA_T vale, portanto:

$$dW_T = S \cos \nu_s \, dA_T. \tag{4.33}$$

A energia refletida difusamente por unidade de área e de tempo torna-se:

$$S_D = \alpha \, S \cos \nu_s , \tag{4.34}$$

onde α é a reflectância média terrestre também denominada albedo terrestre e vale (Cunningham, 1973b)

$$\alpha = 0{,}34. \tag{4.35}$$

A potência por unidade de área incidente num ponto sobre o eixo Z^a, situado a uma altura h sobre a superfície da Terra, devido apenas à radiação provinda de dA_T, será então

$$dS_D = \cos \delta_s \, I \cdot \frac{dA_T}{\bar{\rho}^{a2}} , \tag{4.36}$$

onde δ_s é o ângulo formado pela normal à dA_T e pela direção $\bar{\rho}^a$, que une o centro do elemento ao ponto no eixo Z^a. A intensidade de radiação, de acordo com a Equação 4.5, vale

$$I = \frac{S_D}{\pi} . \tag{4.37}$$

Por geometria, obtêm-se as relações

$$\cos \nu_s = \operatorname{sen} \theta_o \operatorname{sen} \theta \cos \phi + \cos \theta_o \cos \theta \tag{4.38}$$

e:

$$\cos \delta_s = R_T \frac{r \cos \theta - 1}{|\bar{\rho}^a|} , \tag{4.39}$$

onde R_T é o raio da Terra e

$$r = \frac{R_T + h}{R_T} . \tag{4.40}$$

O vetor $\bar{\rho}^a$ vale

$$\bar{\rho}^a = R_T \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \phi \, \bar{i}^a + R_T \operatorname{sen} \theta \cos \phi \, \bar{j}^a -$$

$$- [R_T (1 - \cos \theta) + h] \, \bar{k}^a , \tag{4.41}$$

cujo módulo é

$$|\bar{\rho}^a| = R_T (r^2 - 2 r \cos \theta + 1)^{1/2} . \tag{4.42}$$

Substituindo-se as Equações 4.37, 4.38, 4.39 e 4.42 na Expressão 4.36, divindo-se elas pela velocidade da luz, c, e lembrando-se que

$$dA_T = R_T^2 \operatorname{sen} \theta \, d\theta \, d\phi, \tag{4.43}$$

resulta que o fluxo de quantidade de movimento incidente num elemento de área da superfície em P, por unidade de área normal à direção de incidência $\hat{\rho}^a$, por unidade de tempo e devido à radiação solar refletida difusamente por um elemento de área dA_T da Terra, vale:

$$dp_D = \frac{S\alpha}{\pi c} (\operatorname{sen} \theta_o \operatorname{sen} \theta \cos \phi + \cos \theta \cos \theta_o) \, . \, \frac{(r \cos \theta - 1) \operatorname{sen} \theta}{(r^2 - 2r \cos \theta + 1)^{3/2}} \, d\theta \, d\phi. \tag{4.44}$$

Desta forma, a força que age num elemento de superfície do satélite pode ser tratada como se fosse originado de radiação solar direta, simplesmente subsituindo-se o valor de p_s na Equação 4.23 pelo valor de dp_D dado pela Expressão 4.44, cuja direção de incidência, $\hat{s}^s$, será dada por $\hat{\rho}^a$, efetuando-se a rotação indicada nas Equações 2.11 ou 2.13, obtendo-se $\hat{\rho}^s$.

Para obter a força devida ao albedo total, deve-se proceder à integração da Equação 4.23 sobre toda a superfície terrestre visível pelo satélite, definida por

$$0 \leq \theta \leq \theta_{max} , \tag{4.45}$$

onde

$$\theta_{max} = \operatorname{arcos}(1/r). \tag{4.46}$$

Entretanto, a região visível nem sempre está totalmente iluminada pelo Sol. Quando o satélite ingressa na sombra da Terra, a região visível passa de totalmente iluminada para totalmente escura. É óbvio, portanto, que o limite de integração na variável ϕ deva depender da posição relativa entre esta região e a direção do Sol, que define o contorno da separação entre o dia e a noite na superfície terrestre. A região iluminada é obtida da imposição

$$\cos \nu_s \geq 0. \qquad (4.47)$$

Surgem com isso 4 casos distintos:

a) Região visível totalmente iluminada pelo Sol. Este caso ocorre quando (Figura 4.5)

$$\theta_{max} \leq \pi/2 - \theta_o \quad \text{ou} \quad \text{cotg}\,\theta\,\text{cotg}\,\theta_o \geq 1, \qquad (4.48)$$

e como não existe sombra na região visível, não há restrição a ϕ, ou seja,

$$\phi_{max} = \pi, \qquad (4.49)$$

que define o intervalo de variação em ϕ:

$$-\phi_{max} \leq \phi \leq \phi_{max} \; . \qquad (4.50)$$

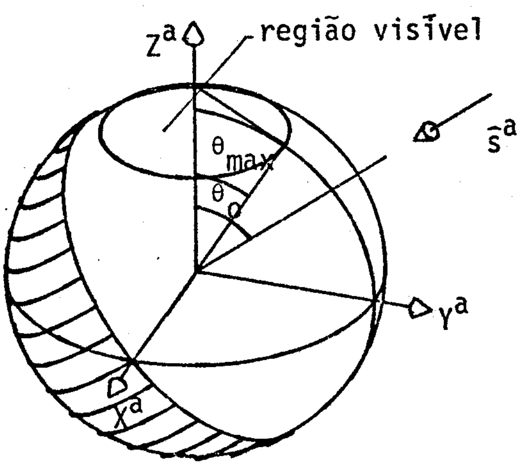

Fig. 4.5 - Região visível totalmente iluminada.

b) Região visível iluminada parcialmente, com $\theta_o \leq \pi/2$. A noite terrestre ainge neste caso parte da área visível, e da Figura 4.6 conclui-se que:

$$\theta_{max} \leq \pi/2 - \theta_o, \tag{4.51}$$

Pode-se agora separá-la em duas regiões de integração complementares, a primeira das quais é totalmente iluminada, onde:

$$\theta \leq \pi/2 - \theta_o \quad \text{ou} \quad \text{cotg}\,\theta\,\text{cotg}\,\theta_o \geq 1 \tag{4.52}$$

e

$$\phi_{max} = \pi, \tag{4.53}$$

e a segunda é parcialmente iluminada, tal que:

$$\pi/2 - \theta_o \leq \theta \leq \theta_{max} \quad \text{ou } 0 \leq \text{cotg}\,\theta\,\text{cotg}\,\theta_o \leq 1, \tag{4.54}$$

onde

$$\phi_{max} = \text{arcos}(-\text{cotg}\,\theta\,\text{cotg}\,\theta_o)\,. \tag{4.55}$$

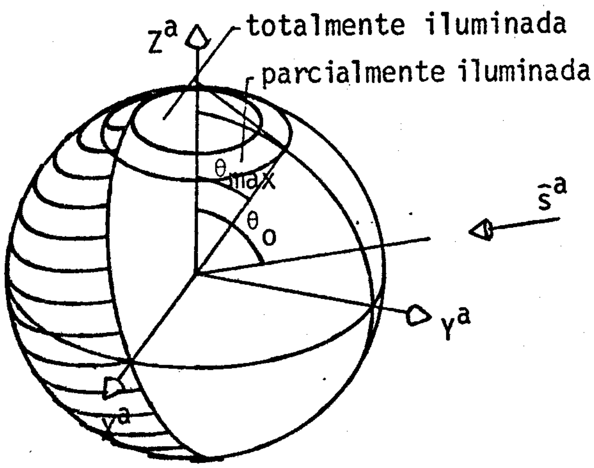

Fig. 4.6 - Região visível parcialmente iluminada, com $\theta_o \leq \pi/2$.

c) Região visível iluminada parcialmente, com $\theta_o > \pi/2$. A sombra, neste caso, atinge mais da metade da região visível, e, conforme a Figura 4.7, a integração em θ deverá ser entre os limites:

$$\theta_o - \pi/2 \leq \theta \leq \theta_{max} \quad \text{ou} \quad -1 \leq \text{cotg}\,\theta\,\text{cotg}\,\theta_o \leq 0; \tag{4.56}$$

novamente o limite em ϕ será dado por:

$$\phi_{max} = \arccos(-\text{cotg}\,\theta\,\text{cotg}\,\theta_o)\,. \tag{4.57}$$

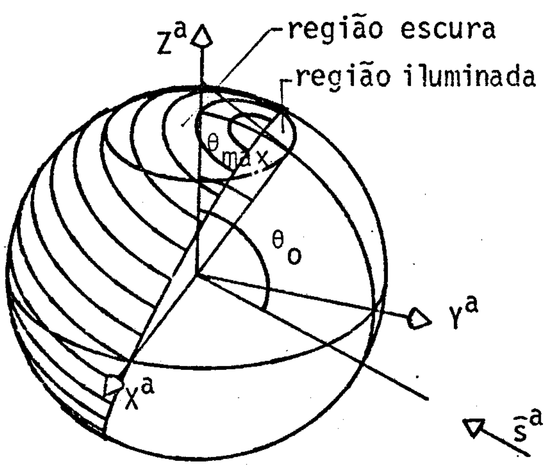

Fig. 4.7 - Região visível iluminada parcialmente, com $\theta_o > \pi/2$.

d) Região visível na sombra (Figura 4.8). Neste caso,

$$\theta_{max} \leq \theta_o - \pi/2 \quad \text{ou} \quad \text{cotg}\,\theta_{max}\,\text{cotg}\,\theta_o \leq -1, \tag{4.58}$$

e não será necessário efetuar a integração, pois a contribuição do albedo será nula.

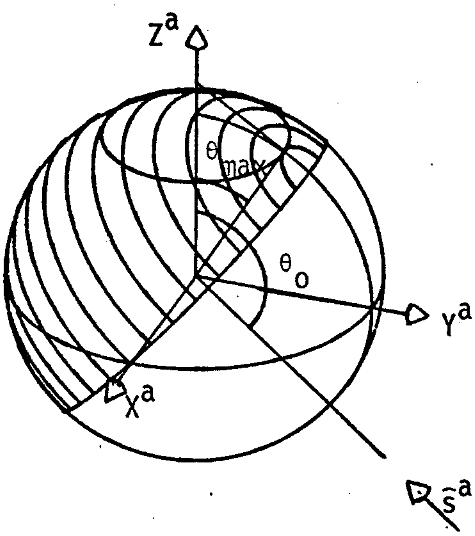

Fig. 4.8 - Região visível na sombra terrestre.

Os quatro limites de integração também podem ser vistos na Figura 4.9, onde ϕ_{max} foi colocado em função de θ e θ_o, de acordo com a Equação 4.55. O caso a) corresponde à $\phi_{max}=180^o$; o caso b) à região $90 \leq \phi_{max} < 180^o$; o caso c) à região $0 < \phi < 90^o$ e, finalmente, o caso d) a valores de ϕ_{max} nulos.

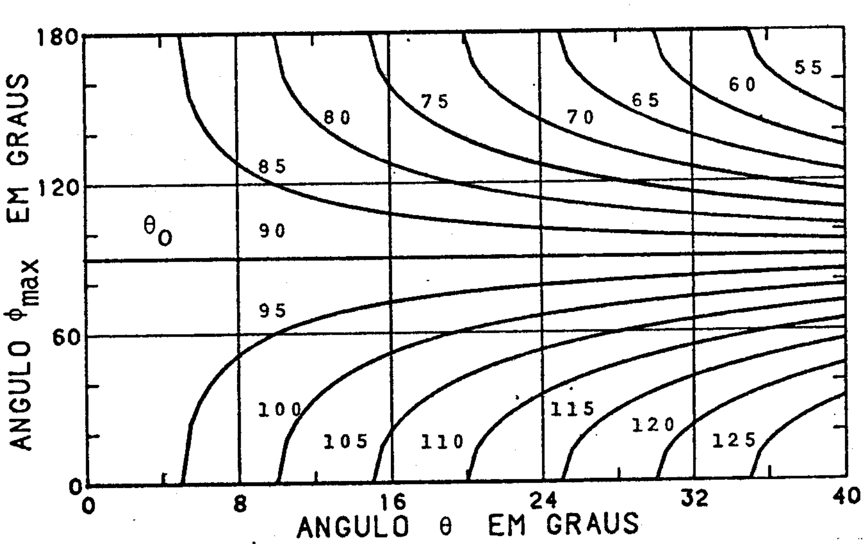

Fig. 4.9 - ϕ_{max} em função de θ para alguns valores de θ_o.

Cabe observar que os limites de integração em θ e ϕ dependem também do ângulo η, formado pela normal ao elemento de superfície do satélite, $\bar{k}^e$, e pela direção de incidência, $\bar{\rho}^s$. A condição

$$\cos \eta = -\bar{k}^e \cdot \bar{\rho}^s \geq 0 \qquad (4.59)$$

pode alterar os limites de integração em θ e ϕ. A análise desses novos limites, porém, além de ser complexa em virtude dos inúmeros casos a analisar, torna-se desnecessária quando se utiliza a integração numérica, já que o elemento que não satisfaz tal condição é simplesmente retirado da integração.

Podem-se, da mesma forma que na radiação direta, definir coeficientes adimensionais para as forças devidas ao albedo, que permitem uma visualização mais rápida da influência dos diversos parâmetros envolvidos na sua determinação. As expressões

$$C_{BV} = \frac{\bar{F}_B^s \cdot \bar{k}^a}{\alpha \, p_s \, A_r} \qquad (4.69)$$

e

$$C_{BH} = \frac{\bar{F}_B^s \cdot \bar{J}^a}{\alpha \, p_s \, A_r} \qquad (4.61)$$

serão denominadas, respectivamente, coeficiente de albedo vertical e coeficiente de albedo horizontal, onde $\bar{F}_B^s$ é a resultante da força atuante no satélite devido à radiação refletida pela Terra.

4.4 - RADIAÇÃO EMITIDA PELA TERRA

A parcela da energia solar absorvida pela superfície da Terra não fica totalmente retida no local. A atmosfera se incumbe, por meio de convecção, de transferir calor das regiões mais quentes (equatoriais) para as regiões mais frias (polares) da Terra. Desta forma, a diferença de temperaturas média entre tais regiões não é tão elevada quanto seria se não houvesse atmosfera. Apesar de a emissão terrestre depender da temperatura absoluta do local, pelo exposto acima, e pela influência relativa desta força, mencionada na Seção 4.1, justifica-se o fato de adotar a temperatura uniforme e constante sobre toda a Terra.

Como na radiação refletida difusamente, será suposto também que a parcela da radiação que não é refletida é emitida difusamente (Abadie, 1968), e considera-se novamente a Terra esférica.

A energia por unidade de tempo absorvida por um elemento de superfície dA_T na Terra, cuja normal faz com a direção do Sol um ângulo ν_s (Figura 4.4), vale:

$$dW_E = (1 - \alpha)\ S \cos\nu_s\ dA_T. \tag{4.62}$$

Integrando-se a Expressão 4.62 sobre toda a superfície terrestre, com a condição $\cos\nu_s \geq 0$, a potência total absorvida resulta em:

$$W_E = (1 - \alpha)\ S\ \pi\ R_T^2. \tag{4.63}$$

A hipótese de a temperatura ser única em toda a Terra significa que esta deveria possuir uma condutância térmica bastante elevada na superfície. Nesse caso, todo o calor absorvido num ponto será distribuído equitativa e instantaneamente aos demais pontos. A potência emitida por unidade de área torna-se então:

$$S_E = \frac{W_E}{4\pi\ R_T^2} = \frac{(1 - \alpha)}{4}\ S\ . \tag{4.64}$$

O fluxo de quantidade de movimento por unidade de área e por unidade de tempo incidente numa superfície situada em P (Figura 4.4) e normal à direção de incidência torna-se:

$$dp_E = \frac{S_E}{\pi c} \frac{\cos \delta_s}{\bar{\rho}^{a2}} dA_T. \quad (4.65)$$

Substituindo-se as Equações 4.39, 4.40, 4.42, 4.43 e 4.64 na Equação 4.65 obtém-se:

$$dp_E = \frac{(1 - \alpha)}{4\pi\ c} S \frac{(r \cos \theta - 1) \operatorname{sen} \theta}{(r^2 - 2r \cos \theta + 1)^{3/2}} d\theta\ d\phi. \quad (4.66)$$

Da mesma forma que no cálculo das forças do albedo, pode-se tratar a radiação terrestre como radiação solar direta, substituindo-se o valor de p_s da Equação 4.23 por dp_E da Relação 4.66, que deve ser integrada obedecendo-se aos limites

$$0 \leq \theta \leq \arccos(1/r) \quad e \quad - \pi \leq \phi \leq \pi, \quad (4.67)$$

que delimitam a região visível. A direção de incidência será fornecida por $\bar{\rho}^a$ que, após efetuada a rotação indicada na Equação 2.11 ou 2.13, resulta em $\bar{\rho}^s$.

Pelas hipóteses feitas, será indiferente se a região visível pelo satélite estiver sendo iluminada pelo Sol ou não. Porém, do mesmo modo que o albedo, a Condição 4.59 deve ser satisfeita para garantir que o elemento de superfície do satélite seja visível ao elemento sobre a Terra. Embora a Relação 4.66 seja muito semelhante à Equação 4.44, não podem entretanto ser agrupadas, visto que os limites de integração de ambas são diferentes, exceto no caso a.

Analogamente ao albedo, serão definidos os coeficientes de radiação terrestre vertical e horizontal, respectivamente como:

$$C_{EV} = \frac{\bar{F}_E^s \cdot \bar{k}^s}{(1 - \alpha)\ p_s\ A_r}, \quad (4.68)$$

$$C_{EH} = \frac{\bar{F}_E^s \cdot \hat{j}^s}{(1-\alpha)\ p_s\ A_r}, \tag{4.69}$$

onde $\bar{F}_E^s$ é a resultante das forças de radiação terrestre.

CAPÍTULO 5

TORQUE DE GRADIENTE DE GRAVIDADE

5.1 - INTRODUÇÃO

O torque de gradiente de gravidade é causado pela variação da força gravitacional com a altitude, fazendo com que a força por unidade de massa varie ao longo do corpo do satélite. Fica claro, assim, que este torque depende da altitude, da geometria e da orientação (atitude) do satélite.

Juntamente com os demais torques, o torque de gradiente de gravidade é de importância fundamental na determinação, previsão e controle de atitude, pois afeta consideravelmente o movimento do satélite em torno do seu centro de massa. Por outro lado, por ter um ponto de equilíbrio estável, o torque pode ser utilizado para estabilizar determinados satélites numa atitude preestabelecida (Beletskii, 1966; Robertson, 1964). Os assim chamados satélites estabilizados passivamente possuem a grande vantagem de ter o eixo associado ao seu menor momento de inércia quase coincidente com a vertical local. Esses satélites dispensam, desta forma, os complexos aparelhos de estabilização e controle, embora a precisão no apontamento seja inferior à destes últimos.

De acordo com Robertson (1964), alguns resultados concernentes ao problema do equacionamento dos torques de gradiente de gravidade foram obtidos por Tisserand, em 1981. Mais recentemente, com o lançamento dos primeiros satélites, o torque de gradiente de gravidade foi reformulado pelo próprio Robertson (1958), que já considerava os efeitos do achatamento terrestre. Beletskii (1966) obtém os torques derivando o potencial gravitacional da Terra e em função dos momentos principais do satélite. É comum, entretanto, que os satélites não possuam suas direções principais coincidentes com seu sistema de referência, que normalmente é o melhor sistema para se terem representados os torques. A formulação apresentada por Meirovitch (1970), cujos torques estão em função do tensor de inércia em relação a um sistema de referência fixo no satélite, facilita assim a compatibilização entre este torque e os calculados nos capítulos anteriores.

Cabe observar que foi considerado nesta análise apenas às forças e torques externos ao satélite. Torques que resultam devido ao uso de sistemas não inerciais, como o gradiente de força centrífugo, por exemplo, tratado por Beletskii (1966) não foram aqui equacionados.

5.2 - TORQUE DE GRADIENTE DE GRAVIDADE NUM CORPO RÍGIDO

A força que age num elemento de massa dm do satélite é dada por

$$d\bar{F}_g^o = - \mu \, dm \frac{\bar{r}}{r^3}, \qquad \mu = 3.986 \times 10^{14} \; m^3/s^2 \tag{5.1}$$

onde μ é a constante gravitacional terrestre e $\bar{r}$ é o raio vetor, no sistema orbital, que vai do centro da Terra ao elemento de massa e vale (Figura 5.1):

$$\bar{r} = x \, \bar{i}^o + y \, \bar{j}^o + (R + z) \, \bar{k}^o, \tag{5.2}$$

onde R é a distância do centro da Terra ao centro de massa do satélite. O efeito do achatamento terrestre, por ser pouco significativo, foi desprezado.

Expandindo-se as componentes de $d\bar{F}_g^o$ em série de Taylor em torno de z/R próximo a zero e desprezando-se os termos iguais ou superiores aos de segunda ordem, tem-se que

$$d\bar{F}_g^o = - \frac{\mu \, dm}{R^2} \left[\frac{x}{R} \, \bar{i}^o + \frac{y}{R} \, \bar{j}^o + \left(1 - 2 \frac{z}{R}\right) \bar{k}^o \right]. \tag{5.3}$$

Calculando-se o momento elementar em relação ao centro de massa $\bar{r}^{s}_{cg}$ do satélite e passando-se à integração, obter-se-á

$$\bar{M}^{o}_{g} = \frac{3\,\mu}{R^3} \int (z\, y\, \bar{i}^{o} - z\, x\, \bar{j}^{o})\, dm. \tag{5.4}$$

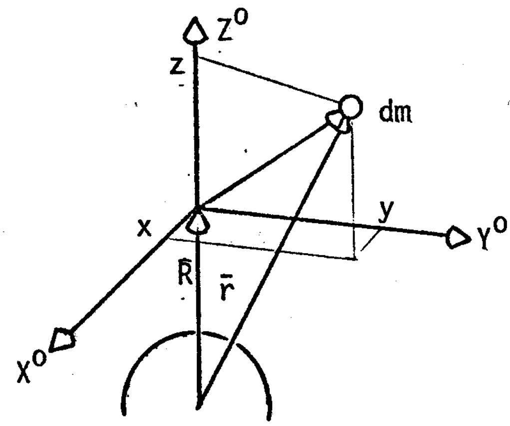

Fig. 5.1 - Elemento de massa do satélite.

A relação que une o sistema orbital ao sistema do satélite é dada pela Equação 2.9, que aqui será resumida por

$$\bar{r}^{s} = \underline{A}\, \bar{r}^{o}, \tag{5.5}$$

onde

$$\underline{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}. \tag{5.6}$$

Logicamente,

$$\bar{M}^{s}_{g} = \underline{A}\, \bar{M}^{o}_{g}\,. \tag{5.7}$$

Substituindo-se o valor de $\bar{M}_g^o$ na Equação 5.7 pela Relação 5.4 e trocando-se x, y e z pelos valores correspondentes dados pela relação inversa da Equação 5.5, obtêm-se

$$\bar{M}_g^s = \frac{3\,\mu}{R^3} \{[-a_{13}a_{33}\ I_{xy}^s + a_{13}a_{23}\ I_{xz}^s + (a_{23}^2 - a_{33}^2)\ I_{yz}^s +$$

$$+ a_{23}a_{33}\ (I_{zz}^s - I_{yy}^s)]\ \hat{i}^s + [a_{23}a_{33}\ I_{xy}^s +$$

$$+ (a_{33}^2 - a_{13}^2)\ I_{xz}^s - a_{13}a_{23}\ I_{yz}^s + a_{13}a_{33}\ (I_{xx}^s - I_{zz}^s)]\ \hat{j}^s +$$

$$+ [(a_{13}^2 - a_{23}^2)\ I_{xy}^s - a_{23}a_{33}\ I_{xz}^s + a_{13}a_{33}\ I_{yz}^s +$$

$$+ a_{13}a_{23}\ (I_{yy}^s - I_{xx}^s)]\ \hat{k}^s\ \}\ , \qquad (5.8)$$

onde I_{xx}^s, I_{xy}^s, I_{xz}^s, I_{yy}^s, I_{yz}^s e I_{zz}^s são as componentes do tensor de inércia, definidas como:

$$\begin{aligned}
I_{xx}^s &= \int_M (y^2 + z^2)\ dm, \\
I_{xy}^s &= -\int_M x\ y\ dm, \\
I_{xz}^s &= -\int_M x\ z\ dm, \\
I_{yy}^s &= \int_M (x^2 + z^2)\ dm, \\
I_{yz}^s &= -\int_M y\ z\ dm, \\
I_{zz}^s &= \int_M (x^2 + y^2)\ dm,
\end{aligned} \qquad (5.9a)$$

onde x, y e z fornecem a posição do elemento de massa dm num sistema paralelo ao sistema de referência do satélite, com origem no centro de massa, e M representa a integração sobre toda a massa m_s do satélite. As propriedades do tensor de inércia aqui utilizadas e sua relação com os momentos principais de inércia de um corpo rígido podem ser encontradas, por exemplo, em Crandall et alii (1968).

Considere-se agora o sistema X'Y'Z' associado aos eixos principais do satélite. Seja também a matriz de rotação $\underline{C}$ que relaciona este sistema ao sistema de referência fixo no satélite. O tensor de inércia pode, então, ser obtido indiretamente pela relação

$$\begin{vmatrix} I^s_{xx} & I^s_{xy} & I^s_{xz} \\ I^s_{xy} & I^s_{yy} & I^s_{yz} \\ I^s_{xz} & I^s_{yz} & I^s_{zz} \end{vmatrix} = \underline{C} \begin{vmatrix} I'_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I'_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I'_{zz} \end{vmatrix} \underline{C}^T , \qquad (5.10)$$

onde I'_{xx}, I'_{yy} e I'_{zz} são os momentos principais de inércia, e $\underline{C}^T$ é a matriz $\underline{C}$ transposta. Se, entrentanto, os eixos principais coincidirem com o sistema de referência do satélite, $\underline{C}$ se reduzirá à matriz identidade e a Expressão 5.8 se resumirá em (Nidey, 1960)

$$\bar{M}^s_g = \frac{3\,\mu}{R^3} [a_{23}a_{33}(I'_{zz} - I'_{yy})\,\vec{i}^s + a_{13}a_{33}\,(I'_{xx} - I'_{zz})\,\vec{j}^s +$$

$$+ a_{13}a_{23}\,(I'_{yy} - I'_{xx})\,\vec{k}^s] \,. \qquad (5.11)$$

Note-se também que, da forma como foi proposto o torque de gradiente de gravidade, este só depende da direção que a vertical local possui com relação ao sistema do satélite, cujos co-senos diretores são dados por a_{13}, a_{23} e a_{33} nas direções X^s, Y^s e Z^s, respectivamente.

Finalmente, adimensionalizando-se o torque de gradiente de gravidade para mais facilmente se compreender a influência dos produtos de inércia, introduzem-se os coeficientes de gradiente de gravidade:

$$C_{MGX} = \frac{\bar{M}^s_g \cdot \vec{i}^s}{\frac{3\,\mu}{R^3}\, m_s\, A_r} , \qquad (5.13)$$

$$C_{MGY} = \frac{\bar{M}_g^s \cdot \bar{j}^s}{\frac{3\mu}{R^3}\, m_s\, A_r}\,, \tag{5.14}$$

$$C_{MGZ} = \frac{\bar{M}_g^s \cdot \bar{k}^s}{\frac{3\mu}{R^3}\, m_s\, A_r}\,, \tag{5.15}$$

onde m_s é a massa total do satélite e A_r é uma área de referência adotada.

CAPÍTULO 6

FORÇAS E TORQUES ELETROMAGNÉTICOS

6.1 - INTRODUÇÃO

O movimento do satélite através da atmosfera parcialmente ionizada, bem como a interação tanto do satélite quanto dos íons e elétrons com o campo magnético terrestre, causam o aparecimento de forças e torques de origem eletrostática e eletromagnética. O número de moléculas neutras, íons e elétrons por unidade de volume, assim como a porcentagem de ionização da atmosfera, são mostradas na Tabela 6.1 em função da altitude. A 4000 km de altura praticamente todas as moléculas da atmosfera estão ionizadas (Brundin, 1963).

TABELA 6.1

NÚMERO DE MOLÉCULAS POR m^3 NA ATMOSFERA

Altura km	n(neutras) m^{-3}	n_i(íons) m^{-3}	n_e(elétrons) m^{-3}	% íons
300	$7 \cdot 10^{14}$(1)	$7 \cdot 10^{11}$	$3 \cdot 10^{11}$(2)	0,1 (3)
1500	$3 \cdot 10^{10}$(4)	$7 \cdot 10^{9}$(4)	$7 \cdot 10^{9}$ (4)	23

FONTE: (1) USAF, 1976; (2) Oya, 1970; (3) Brundin, 1963;
(4) Hohl and Wood, 1963.

As forças eletromagnéticas foram inicialmente investigadas por Jastrow and Pearse (1957), que concluiram que um satélite em movimento na ionosfera deveria apresentar uma carga elétrica negativa. Artigos posteriores (Beard and Johnson, 1960) incluem a influência do campo magnético terrestre e o efeito foto-emissor de elétrons (Chang and Smith, 1960; Brundin, 1963). Nos artigos de Halverson and Cohen (1964) e Smith (1964), os torques de Foucault foram determinados em sa télites esféricos. Hohl and Wood (1963) e Hohl (1966) sintetizaram as forças e torques coulombianos e de indução, obtendo o potencial do satélite sem grandes aproximações. A distribuição de cargas na esteira do satélite (face voltada contra a velocidade) foi formulada por Kiel et alii (1968) e Vaglio-Laurin and Miller (1970). Finalmente, alguns dados relativos às condições e à composição iônica da atmosfera, foram fornecidos por Oya (1970) e Samir and Wrenn (1969), que utilizaram as medidas efetuadas pelo foguete K-9M-21 e o satélite Explorer XXXI, respectivamente.

6.2 - O POTENCIAL DO SATÉLITE

Com exceção dos artigos de Beard and Johnson (1960) e Chu and Gross (1966), todos os demais admitem um satélite esférico cuja superfície externa é condutora no equacionamento das forças e torques. É claro, portanto, que as inúmeras soluções formuladas nestes artigos (algumas das quais diferem substancialmente quanto aos resultados) encontram pouca aplicação em satélites de outros formatos, a não ser que se façam inúmeras hipóteses simplificadoras a fim de ajustar a teoria a estes satélites. Sem dúvida, a grande dificuldade em tratar de satélites genéricos é a dificuldade em obter a distribuição do campo elétrico e do potencial na sua superfície, resolvendo-se a equação de Poisson. Outro problema também é obter o fluxo das correntes elétricas na superfície e fora delas. Em vista disso, aliado ao fato das forças e torques eletromagnéticos serem menores que as demais forças tratadas anteriormente, será feita aqui apenas uma descrição qualitativa das primeiras.

Embora a temperatura cinética dos elétrons seja aproximadamente igual à dos íons na alta atmosfera, sua velocidade média é entretanto muito maior, devido à sua pequena massa. Por outro lado a velocidade do satélite, também muito menor que a velocidade dos elétrons, é superior à dos íons, de tal forma que se pode visualizar (Brundin, 1963) que o satélite está em repouso em relação aos elétrons e que os íons estão parados na atmosfera em relação ao satélite. Desta forma, o número de elétrons que colidem com a superfície do satélite é muito maior que o número de íons, e, portanto, se o satélite for condutor, irá adquirir um potencial negativo, equilibrando assim o fluxo de elétrons e íons. Forma-se então ao redor do satélite uma fina camada onde a densidade dos elétrons é inferior à do ambiente, por serem estes repelidos pelo potencial negativo da superfície. Admite-se normalmente, também, que na colisão com a superfície do satélite os íons adquiram elétrons e se tornen neutros. Além disso, em virtude de sua velocidade térmica ser significativamente menor que a velocidade do satélite, esta colisão ocorre preferencialmente na parte frontal (com relação à velocidade), ao passo que os elétrons incidem vindos de qualquer direção (Figura 6.1).

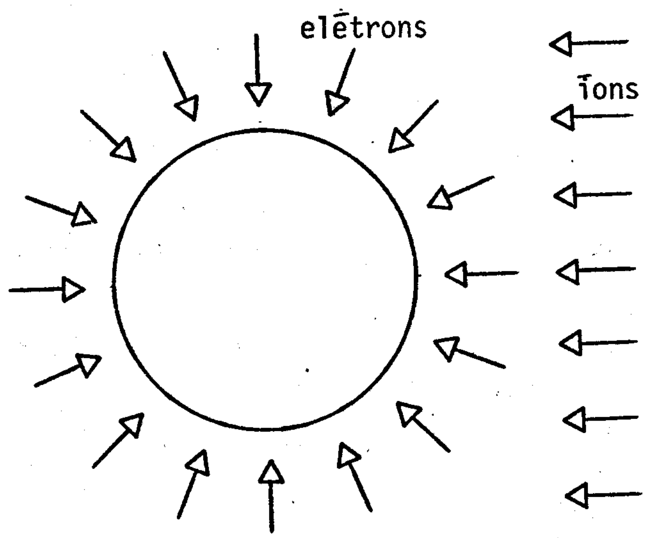

Fig. 6.1 - Velocidades dos elétrons e íons com relação ao satélite, na ausência de campo magnético.

Isso provoca na parte traseira (esteira) uma região com potencial também negativo, pela ausência de íons, que se estende até algumas vezes a dimensão do satélite (Kiel et alii, 1969). O potencial na superfície do satélite atinge, conforme seu tamanho e altitude, de alguns centésimos a no máximo alguns Volts negativos (Hohl, 1966) na sombra da Terra. Quando exposto à luz solar, o equilíbrio é deslocado no sentido de tornar o potencial menos negativo pelo efeito de fotoemissão eletrônica.

As cargas elementares não se distribuem, porém, igualmente pela superfície do satélite, pois a presença do campo magnético terrestre irá produzir uma voltagem induzida dada por $\bar{v}_s \times \bar{B}$, onde $\bar{B}$ é o vetor campo magnético e $\bar{v}_s$ é a velocidade do satélite. Essa voltagem fará então que uma extremidade do satélite se torne mais negativa, enquanto a outra se torna menos negativa (Figura 6.2), atingindo valores positivos apenas em satélites muito longos (Chu and Gross, 1966).

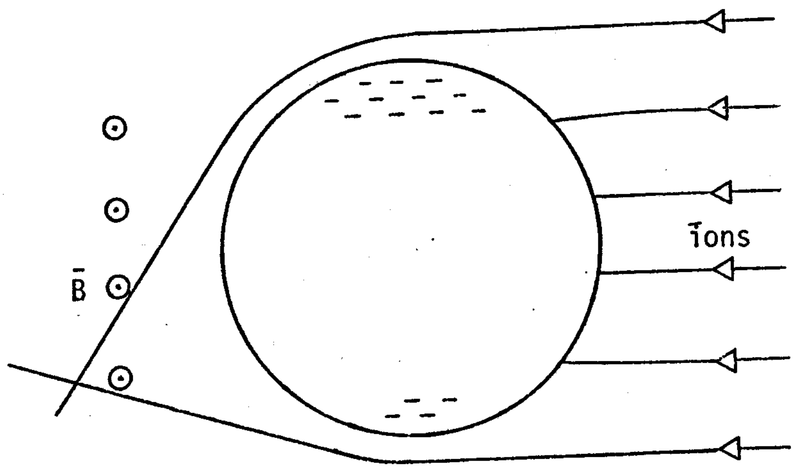

Fig 6.2 - Efeito do campo magnético terrestre na distribuição superficial de cargas.

Outro fato a se levar em conta, neste caso, é que, na presença de um campo magnético, tanto os elétrons quanto os íons descrevem trajetórias helicoidais na ionosfera, sendo que o raio de giro médio para os elétrons é de 3 a 5 cm, enquanto para os íons normalmente está compreendido entre 5 e 10 m (Chu and Gross, 1966). Isto quer dizer que os elétrons caminham na ionosfera girando ao longo das linhas do campo magnético e que, nesta direção, o fluxo de elétrons na superfície do satélite é maior.

Todos os aspectos acima descritos influem em certo grau na distribuição de carga no satélite. A interação deste potencial com a ionosfera e com o campo magnético da Terra irá produzir forças e torques no satélite que serão descritos nas seções seguintes.

6.3 - FORÇA E TORQUE DE COULOMB

Devido ao potencial negativo do satélite, os íons incidentes, preferencialmente na direção da velocidade do satélite, são defletidos no seu campo elétrico, colidindo a seguir com a superfície. Nestes dois processos, deflexão e colisão, há uma mudança na quantidade de movimento dos íons, que provoca uma força e um torque no satélite. Além disso, conforme pode ser visto na Figura 6.2, alguns íons, cuja trajetória não era de colisão antes de serem defletidos, chocam-se efetivamente com a superfície, de tal forma que se pode tratar essa força como se houvesse um aumento na seção transversal do satélite. A polarização provocada pelo campo magnético causará uma deflexão nos íons, maior na extremidade mais negativa, tornando o fluxo assimétrico (no caso de um satélite esférico) e provocando com isso um torque.

Em virtude da pequena massa dos elétrons, seu efeito na força e no torque coulombiano é frequentemente desprezado.

A fim de se obter apenas a grandeza do arrasto de Coulomb, a seguinte expressão, fornecida por Jastrow and Pearse (1957), pode ser utilizada:

$$F_C = m_i \, n_i \, A_t \, v_s^2, \qquad (6.1)$$

onde m_i é a massa média de um íon; n_i, o número de íons por unidade de volume no local; A_t, a área da seção transversal; e F_C a força de Coulomb na direção da velocidade v_s do satélite.

6.4 - TORQUE DE CORRENTE DE FOUCAULT

A variação, tanto em módulo quanto em direção, do campo magnético terrestre causa circuitos fechados de corrente elétrica na superfície e no interior de um satélite condutor. Essas correntes dis sipam energia por efeito Joule, introduzindo, desta forma, um torque que tende a imobilizar o satélite com respeito ao campo magnético (Figura 6.3). O movimento de rotação própria do satélite é o principal causador desse torque, que - além de reduzir exponencialmente a rotação - também precessa seu eixo (Spence Jr., 1978).

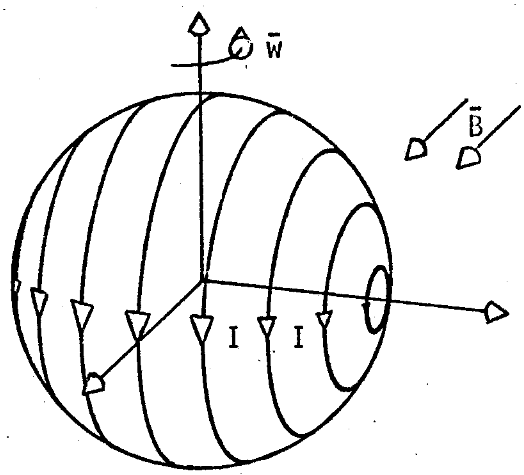

Fig. 6.3 - Correntes elétricas induzidas na superfície do satélite pelo campo magnético da Terra.

O torque produzido por esse efeito pode ser aproximado por

$$\bar{M}_E = k\,(\bar{w} \times \bar{B}) \times \bar{B}, \qquad (6.2)$$

onde $\bar{w}$ é o vetor velocidade de rotação do satélite, $\bar{B}$ é o campo magnético local e k é uma constante que depende do formato do satélite (Tabela 6.2).

TABELA 6.2

VALORES DE k PARA ALGUNS FORMATOS

Anel circular de raio r e área de seção reta S, num plano que contêm o eixo de rotação.	$\frac{\pi}{4} \sigma r^3 S$
Esfera de raio r, espessura d e condutividade do material da superfície σ.	$\frac{2\pi}{3} \sigma r^4 d$
Cilindro de raio r, espessura d, comprimento L e condutividade σ.	$\pi \sigma r^3 L d \left[1 - \frac{2d}{L} \text{tgh} \left(\frac{1}{2d}\right)\right]$

FONTE: Spence Jr. (1978).

6.5 - FORÇA E TORQUE DE INDUÇÃO

O fluxo de elétrons e íons no satélite, associado ao efeito da fotoemissão eletrônica, provoca uma distribuição de corrente não necessariamente confinada ao volume do satélite. Essa densidade de corrente, ao interagir com o campo magnético da Terra, causa uma força e um torque no satélite. Do exposto, fica claro que o torque ou a força de indução serão nulos no vácuo absoluto. O principal efeito causador desse tipo de força é a corrente que surge quando os elétrons acumulados nas regiões mais negativas caminham pela superfície para neutralizar os íons incidentes na parte frontal (Hohl and Wood, 1963; Hohl, 1966), como visto na Figura 6.4.

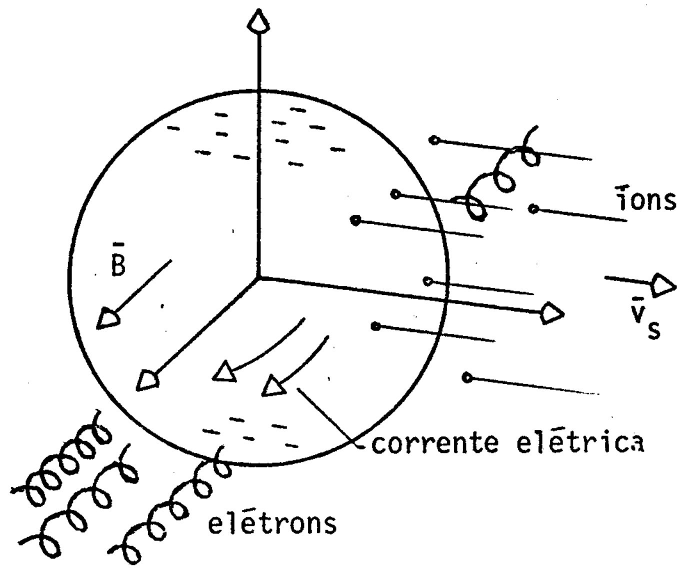

Fig. 6.4 - Fluxo de elétrons e íons no satélite.

6.6 - OUTROS TIPOS DE FORÇAS

O movimento de um satélite condutor, no interior de um gás também condutor (plasma) e na presença de um campo magnético, provoca distúrbios neste gás ao longo da trajetória. Esses distúrbios propagam-se principalmente por meio de ondas denominadas ondas Alfvén (Chu and Gross, 1966), e como sua energia deriva da energia cinética do satélite, há uma dissipação desta última, que se traduz por um arrasto no satélite. As ondas Alfvén foram tratadas nos artigos de Chu and Gross (1966) e Venkataraman and Gustafson (1973): ambos concordam que seu módulo é significativamente menor que a força de indução.

A polarização no satélite provoca acúmulo de cargas elétricas em extremidades opostas. Se este estiver girando, estas cargas vão percorrer sua superfície, ficando entretanto estacionárias com respeito ao campo magnético. A corrente elétrica assim gerada irá provocar um torque no satélite, porém muito menor que o torque de Foucault, podendo ser totalmente ignorado.

O satélite carregado com uma carga elétrica q estará sujeito a uma força de Lorentz dada por $q\ \bar{v}_s \times \bar{B}$, sempre perpendicular à trajetória. Seu módulo é, entretanto, desprezível quando comparado às demais forças.

Restam ainda outras possíveis fontes de toque, que dependem essencialmente dos detalhes construtivos do satélite, como por exemplo a interação com o campo magnético das correntes geradas pelos aparelhos no interior do satélite e de barras pré-magnetizadas na estrutura (usadas para amortecer o movimento de rotação própria do satélite). Embora estes torques sejam bastante significativos, sua modelagem depende intrinsecamente do satélite analisado, não sendo possível portanto uma formulação geral.

CAPÍTULO 7

APLICAÇÃO DA TEORIA E RESULTADOS

7.1 - INTRODUÇÃO

A teoria desenvolvida nos capítulos anteriores foi adaptada em termos computacionais e, posteriormente, foi confrontada com resultados calculados analiticamente nos Apêndices A e B. Neste capítulo analisam-se os resultados obtidos pela aplicação do programa gerado a um satélite experimental, cuja geometria, dimensões e sistema de coordenadas $X^sY^sZ^s$ estão mostradas na Figura 7.1. As principais características deste satélite são:

1) Possui formato de um prisma com base octagonal, em cuja base superior (9) é fixada uma antena (18) e um mastro central (15) que, juntamente com a massa de 3 kg na sua extremidade superior (14), respondem pela estabilização do satélite por gradiente de gravidade. Na base inferior (11) estão fixadas duas antenas (19 e 17), responsáveis pela retransmissão de dados. No cilindro (16) estão fixados alguns equipamentos de bordo e a estrutura do satélite. As laterais (1 a 8) e a face superior (9) estão cobertas por células solares.

2) A massa total do satélite, m_s, é igual a 93,5 kg, cujas componentes do tensor de inércias valem

$$I^s_{xx} = 323,39 \ \text{kg m}^2 \tag{7.1a}$$

$$I^s_{xy} = -0,07 \ \text{kg m}^2 \tag{7.1b}$$

$$I^s_{xz} = 0,137 \ \text{kg m}^2 \tag{7.1c}$$

$$I^s_{yy} = \overset{3}{\cancel{1}}24,06 \ \text{kg m}^2 \tag{7.1d}$$

$$I^s_{yz} = 0{,}111 \text{ kg m}^2 \tag{7.1e}$$

$$I^s_{zz} = 10{,}135 \text{ kg m}^2, \tag{7.1f}$$

em relação a um sistema de eixos paralelos ao sistema do satélite, com origem no centro de massa. O sistema do satélite também está indicado na Figura 7.1; em relação a este sistema, o centro de massa tem como coordenadas:

$$\bar{r}^s_{cg} = - 0{,}0013\ \hat{i}^s - 0{,}0007\ \hat{j}^s + 0{,}606\ \hat{k}^s \tag{7.2}$$

em metros.

3) Admite-se que as características da superfície, como os coeficientes de transferência de quantidade de movimento σ e σ', a reflectância γ, a parcela difusa da reflectância ρ, e a temperatura de um elemento T_w, são constantes em toda a superfície do satélite.

4) Os elementos orbitais e a data de lançamento serão considerados como pré-especificados pelos requisitos da missão, e admitidos, para fins de análise, com a seguinte geometria: altitude do satélite entre 700 e 800 km, que fornece para o semi-eixo maior da órbita e excentricidade os valores:

$$a = 7128155 \text{ m}, \tag{7.3}$$

$$e = 0{,}007; \tag{7.4}$$

a inclinação e o argumento do perigeu foram adotados como

$$i = 22^o, \tag{7.5}$$

$$\omega = 14{,}3^o. \tag{7.6}$$

A data de início da geração de órbita escolhida foi 10 de dezembro de 1983, 0,0 h_s TU.

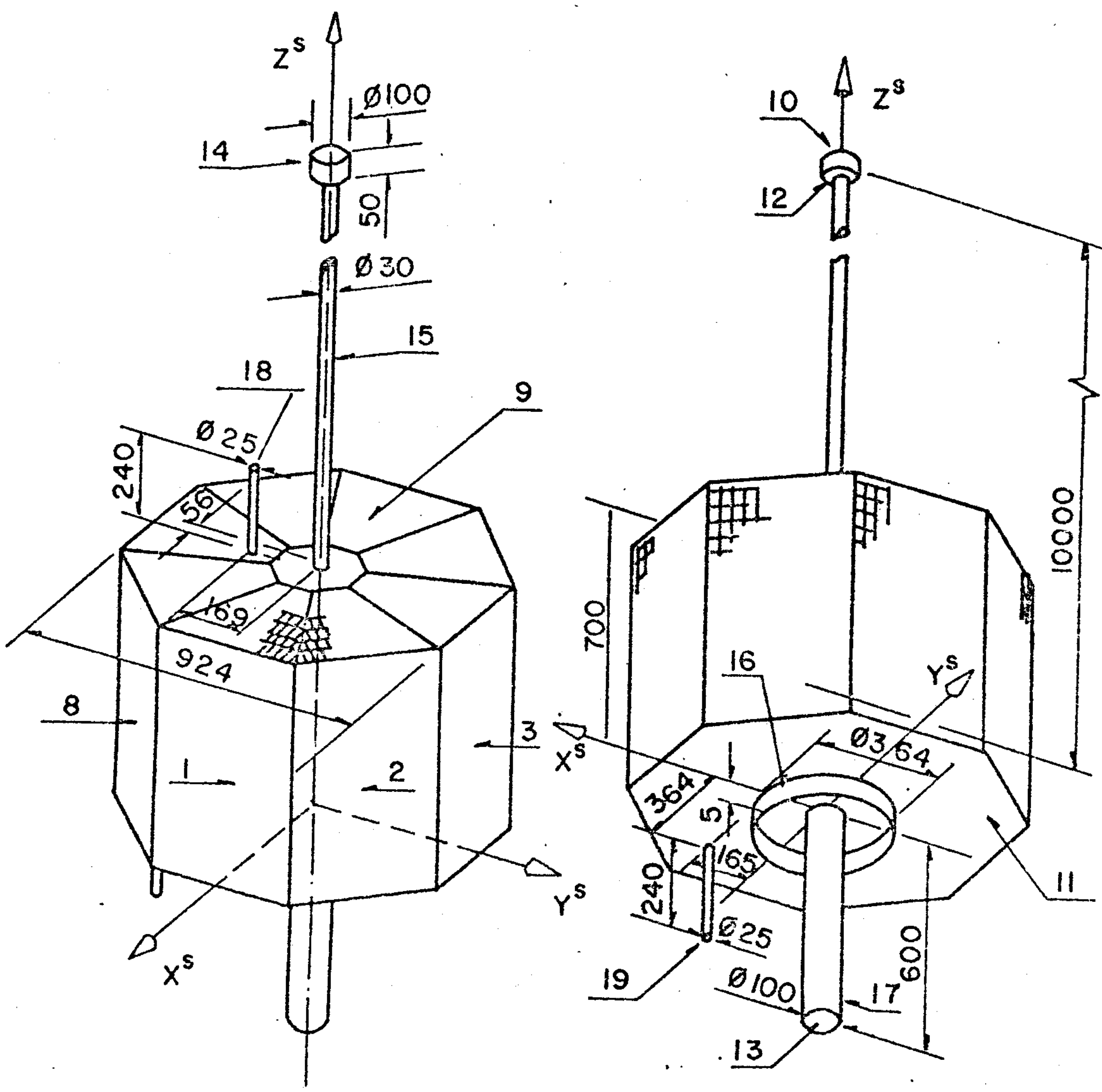

Fig. 7.1 - Geometria, dimensões e eixos do satélite experimental.

5) A área de referência A_r, utilizada na obtenção dos coeficientes adimensionais, foi adotada como área de contorno do satélite projetado na direção de um eixo no plano X^sY^s, o qual forma com X^s um ângulo de $22{,}5^o$ (as antenas 18 e 19 foram subtraídas deste cálculo), o que resulta em:

$$A_r = 1{,}06675 \text{ m}^2. \qquad (7.7)$$

O comprimento característico, L_r, para a adimensionalizadas como se segue. Para a radiação solar direta e para a radiação refletida ou emitida por um elemento da Terra, as áreas encobertas (na sombra) deverão ser retiradas da integração das forças e torques. Embora estes elementos emitam radiação em função de sua temperatura, justifica-se sua retirada da integração em virtude da sua pequena contribuição resultante (Evans, 1964). Além disso, para o satélite analisado aqui, mesmo no pior caso as áreas encobertas representam apenas uma pequena fração da área exposta à radiação, o que minimiza seus efeitos.

A determinação das partes encobertas no cálculo das forças aerodinâmicas é extremamente difícil, pois, ao contrário da radiação, as moléculas de gás incidem num elemento vindas de qualquer direção. Pode-se entretanto considerar que o fluxo de moléculas é muito maior na direção da velocidade do satélite, já que esta velocidade, por sua vez, é muito maior que a velocidade térmica das moléculas. Isto é sempre verdadeiro nas altitudes orbitais e se traduz por uma alta razão de velocidades, s. O efeito, portanto, do fluxo na direção de velocidade pe muito maior que nas demais direções (Evans, 1964; Boettcher and Legge, 1980), podendo-se desprezar desta forma a força no elemento encoberto por outro nesta direção. Resulta então que as regiões encobertas, neste caso, serão tratadas de maneira similar às oriundas da radiação.

No satélite analisado (Figura 7.1) o efeito do sombreamento foi considerado entre: o mastro (15) e o painel superior (9); o mastro e a massa (14) e a massa e o painel. Na parte inferior considerou-se a interdependência entre: a face inferior (11) e o suporte cilíndrico (16); a face e a antena (13) e, finalmente, entre a antena e o suporte. Em todos os casos acima, o efeito foi considerado em ambos os sentidos. Apenas a sombra das faces superior e inferior nas pequenas antenas (18 e 19, respectivamente) foi considerada somente neste sentido. As laterais, por serem planas e nunca estarem cobertas, não foram subdivididas em elementos na integração numérica. Cada um dos cilindros do satélite (14 a 19) foi dividido em 80 partes.

Finalmente, nas Seções 7.2, 7.3 e 7.4 procede-se à obtenção e análise dos coeficientes das forças equacionadas. Na Seção 7.5 verifica-se o comportamento dessas forças ao longo de uma órbita.

7.2 - COEFICIENTES AERODINÂMICOS

A fim de caracterizar a direção da velocidade do satélite no seu sistema, $X^SY^SZ^S$, definem-se os ângulos α_A e β_A (Figura 7.2) denominados respectivamente ângulo de ataque e ângulo de guinada.

Devido ao formato octagonal predominante na geometria do satélite, espera-se uma variação periódica dos coeficientes com β_A. Além disso, o período deverá ser de 45^o e não poderá existir diferença substancial entre um período e outro, já que a única assimetria do satélite são as pequenas antenas 18 e 19, cuja influência deverá ser quase imperceptível. A Figura 7.3, que apresenta o coeficiente de arrasto aerodinâmico em função do ângulo β_A para diferentes valores de s, confirma esta variação periódica. Note-se nesta figura que o valor máximo de C_{DA} ocorre quando β_A é igual a $22,5^o + k\ 45^o$, onde k = 1, 2, 3, ... Isto porém não será sempre válido, pois o valor dos coeficientes de transferência de quantidade de movimento, σ e σ', unitários na Figura 7.3, muda a posição deste máximo. De fato, como pode ser visto nas Figuras 7.4 e 7.5, que fornecem C_{DA} em função de s para alguns valores de σ e σ', ocorre uma inflexão em C_{DA} para σ e σ' aproximadamente iguais a 0,18. Valores menores que este terão C_{DA} máximos em β_A iguais a k 45^o (k = 1, 2, 3, ...). Note-se também nestas figuras que C_{DA} aumenta conforme σ e σ' diminuem, ou seja, quanto mais especular for a colisão entre moléculas e satélite, maior será o arrasto. Isto sem dúvida se deve ao formato quase cilíndrico do satélite, no qual o coeficiente aumenta quando o tipo de reflexão muda de difuso para especular, como pode ser visto nos resultados do Apêndice A.

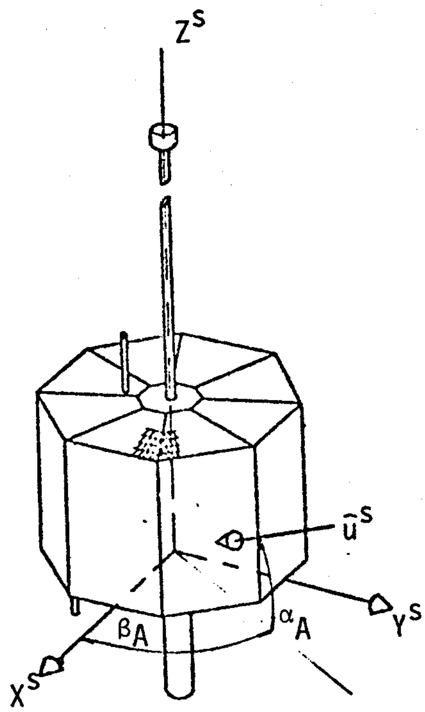

Fig. 7.2 - Ângulos α_A e β_A no sistema do satélite.

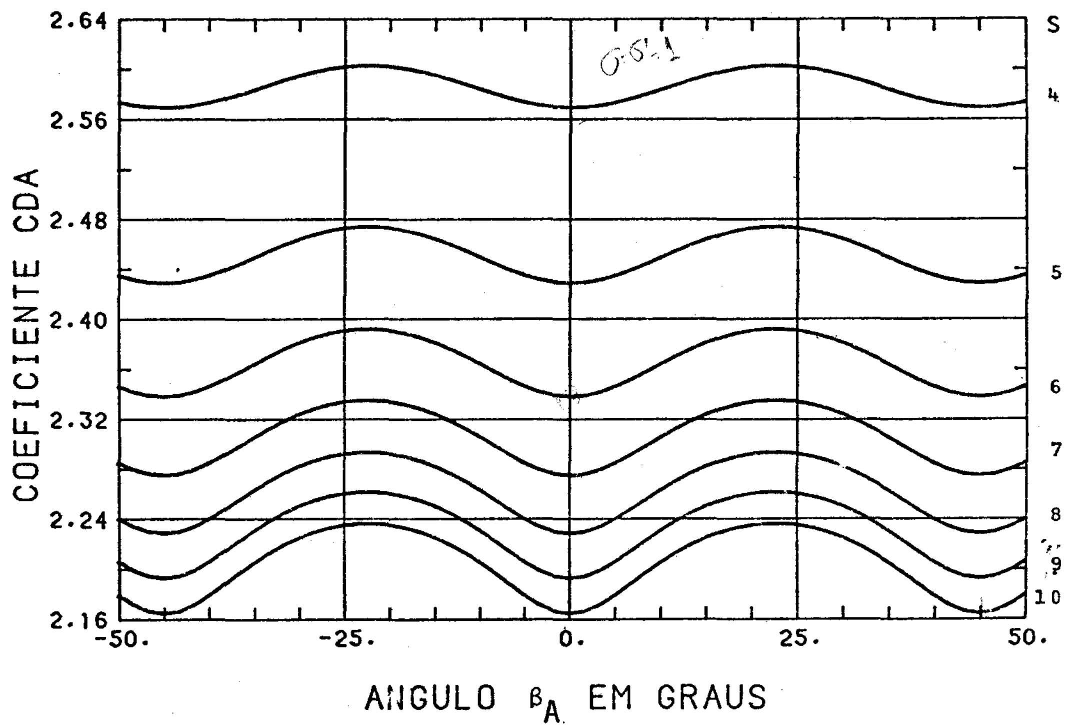

Fig. 7.3 - Coeficiente de arrasto aerodinâmico, como função do ângulo β_A, para alguns valores da razão de velocidades s.

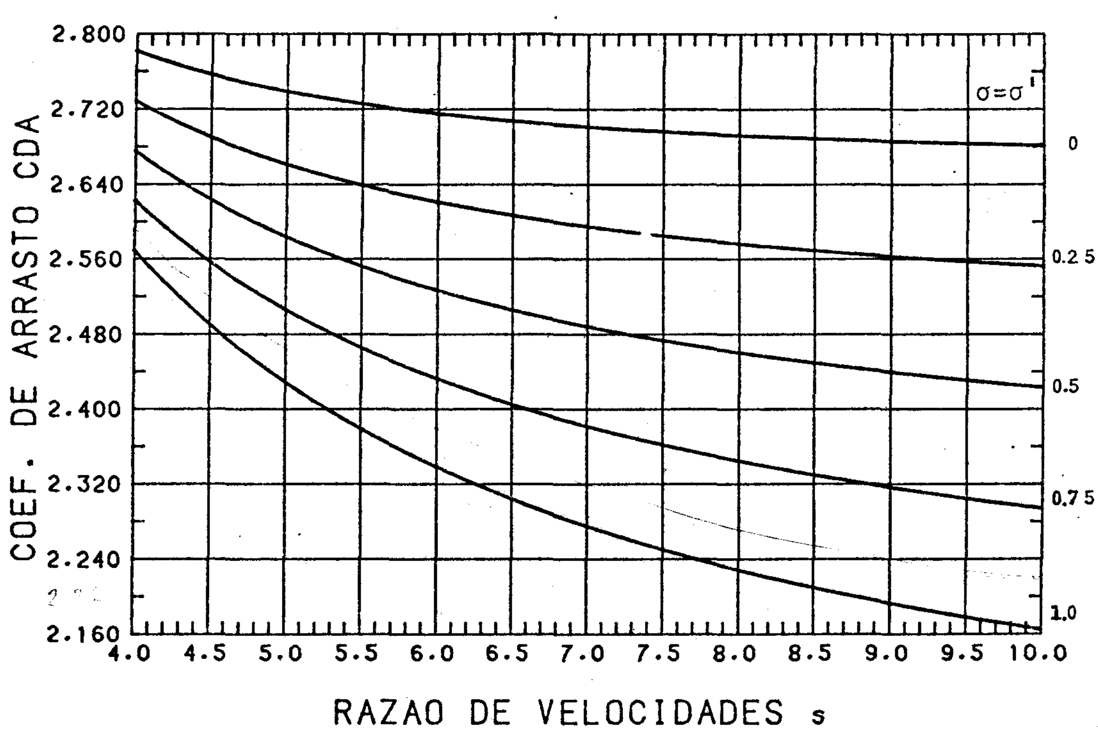

Fig. 7.4 - Coeficiente de arrasto, C_{DA}, em função da razão de velocidades s e de σ e σ' (ângulos de ataque nulos: $\alpha_A = \beta_A = 0$).

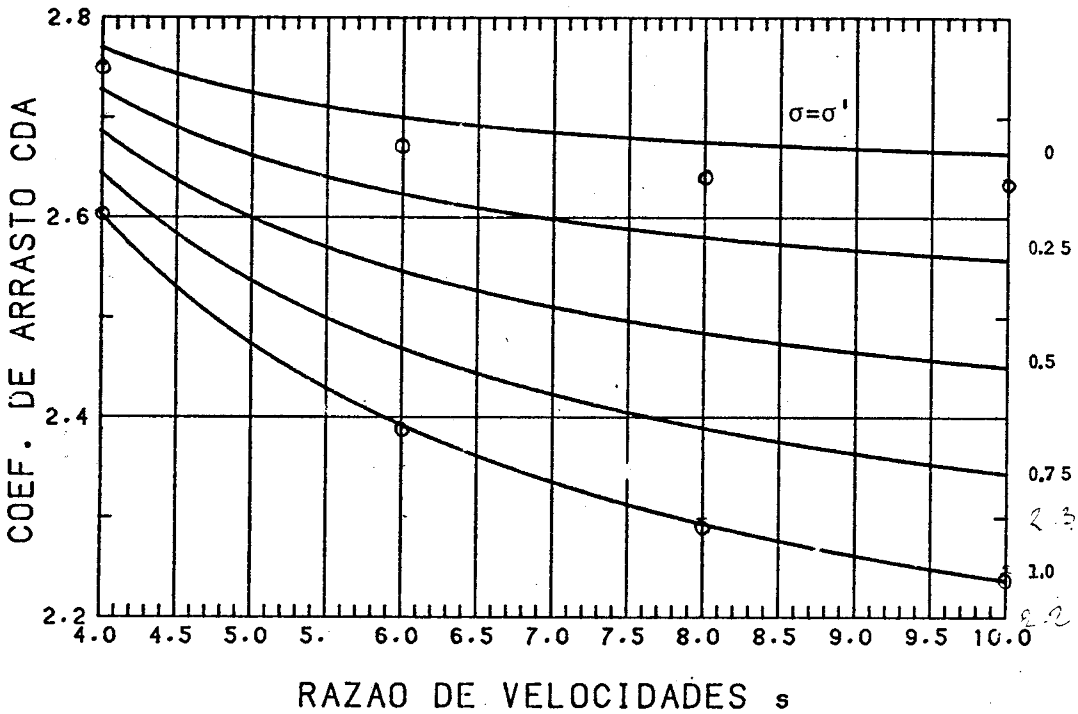

Fig. 7.5 - Coeficiente de arrasto, em função de s com σ e σ' variando de 0 a 1 (ângulos de ataque: $\alpha_A = 0$, $\beta_A = 22,5^o$ e $T_w/T_i = 1$).

Adotando-se σ e σ' unitários, nas Figuras 7.6 e 7.7, investigou-se a variação de C_{DA} com o ângulo de ataque α_A para alguns valores da razão de velocidades s, que correspondem a altitudes de aproximadamente 300 a 900 km em órbita circular. Na Figura 7.6 o ângulo β_A vale 0^o, e na Figura 7.7, $22,5^o$. Em ambos, o mínimo coeficiente de arrasto para qualquer razão de velocidades ocorre nos extremos de α_A, ou seja, -90^o e 90^o. Existem também dois pontos de máximo para $\alpha_A = -30^o$ e $\alpha_A = 30^o$ aproximadamente, com um mínimo local perto de 0^o. A Figura 7.8 confirma a pouca influência da razão de temperaturas, T_w/T_i no arrasto, conforme foi dito na Seção 3.3.

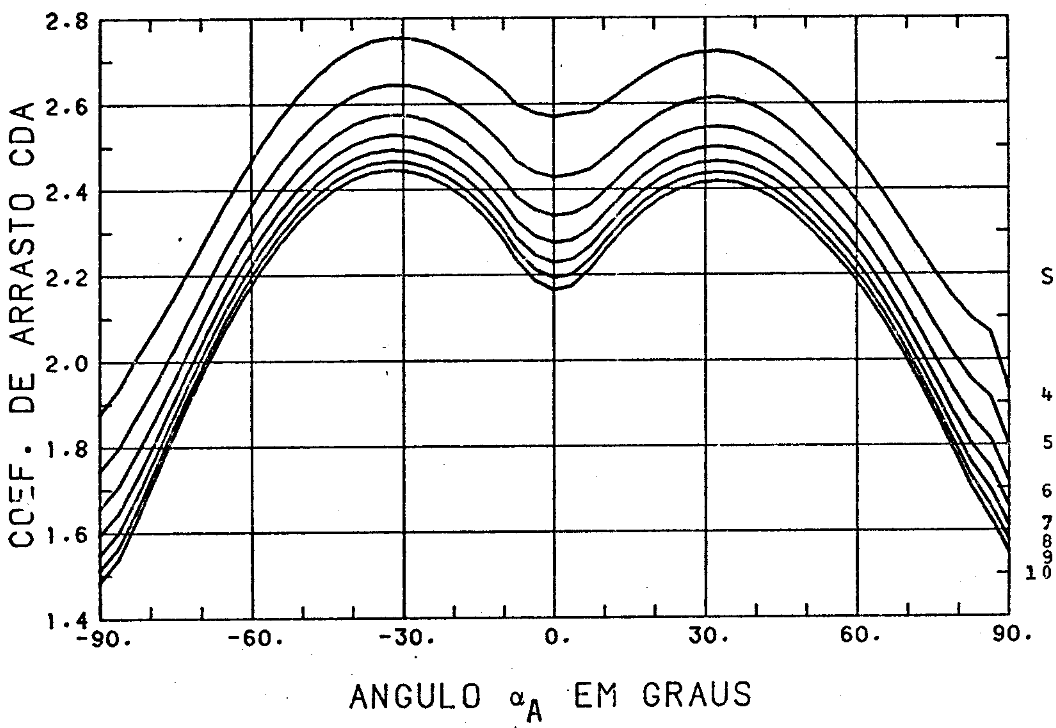

Fig. 7.6 - Coeficiente C_{DA} em função do ângulo α_A e da razão de velocidades $s(\beta_A = 0, \sigma = \sigma' = T_w/T_i = 1)$.

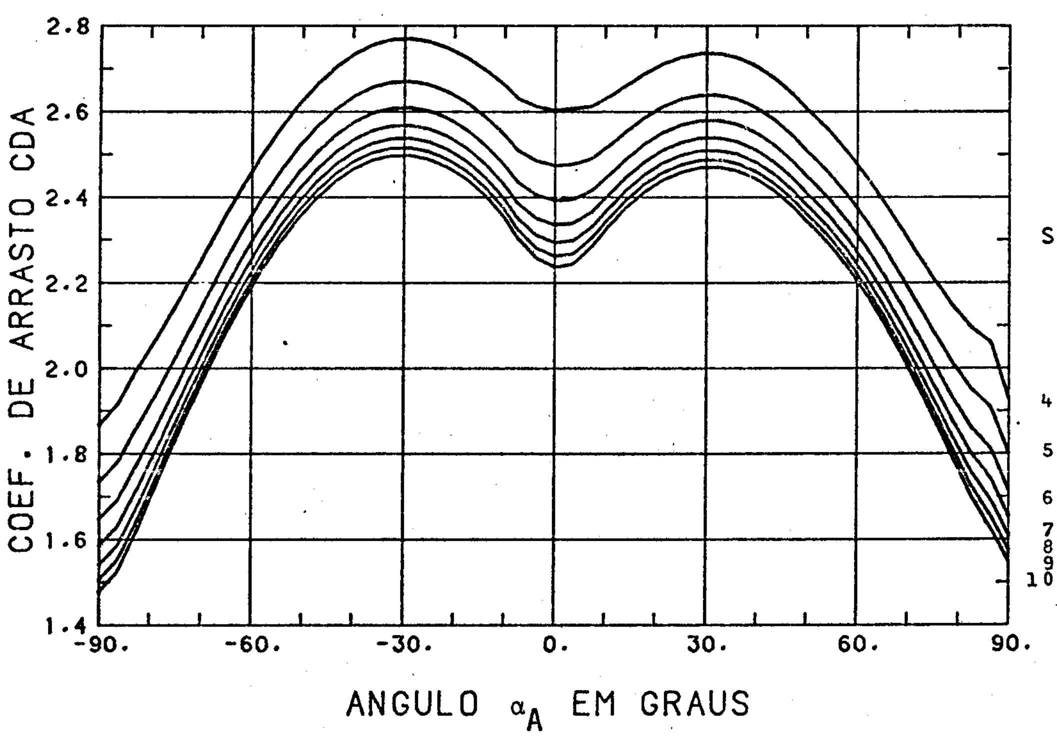

Fig. 7.7 - Coeficiente de arrasto aerodinâmico em função de α_A e $s(\beta_A = 22{,}5^o$ e $\sigma = \sigma' = T_w/T_i = 1)$.

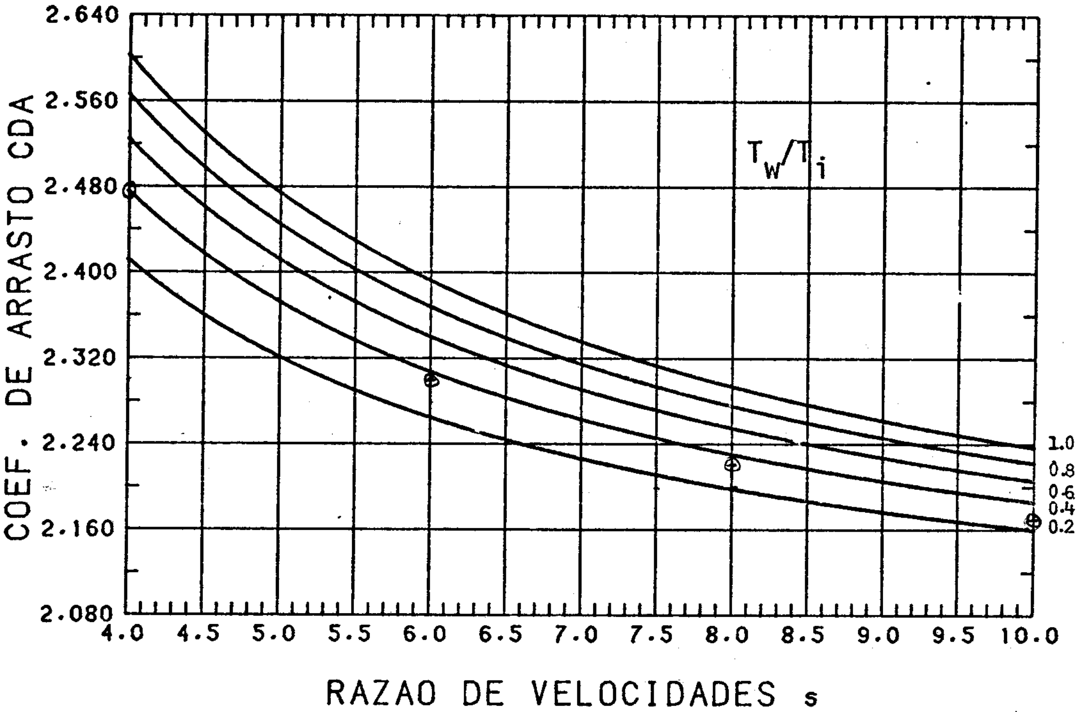

Fig. 7.8 - Variação de C_{DA} com s e T_W/T_i (α_A = 0, β_A = 22,5^o e σ = σ' = 1).

Os coeficientes de torque dados pelas Equações 3.26, 3.27 e 3.28 foram obtidos no sistema do satélite e em relação ao centro de massa. Verifica-se na Figura 7.9 que o centro de pressões se localiza acima do centro de massa, em virtude da influência do mastro, o que resulta em um torque negativo no eixo Y^s para β_A = 0^o. Entretanto, o torque aerodinâmico pouco varia com a razão de velocidades, sendo mais dependente do ângulo α_A. A resultante do torque atua praticamente no plano formado pelos eixos X^sY^s, pois a componente no eixo Z^s, causada somente pelas antenas 18 e 19, possui uma ordem de grandeza 3 vezes inferior à resultante. As Figuras 7.10, 7.11 e 7.12 mostram a variação quase senoidal do coeficiente de torque nos eixos X^s, Y^s e Z^s respectivamente, com o ângulo β_A. Verifica-se, no caso, a pouca influência do formato octagonal (que deveria superpor ao coeficiente uma outra variação senoidal com período de 45^o) em detrimento da do mastro, cujo centro de pressão se encontra muito mais afastado do centro de massa que o corpo prismático do satélite.

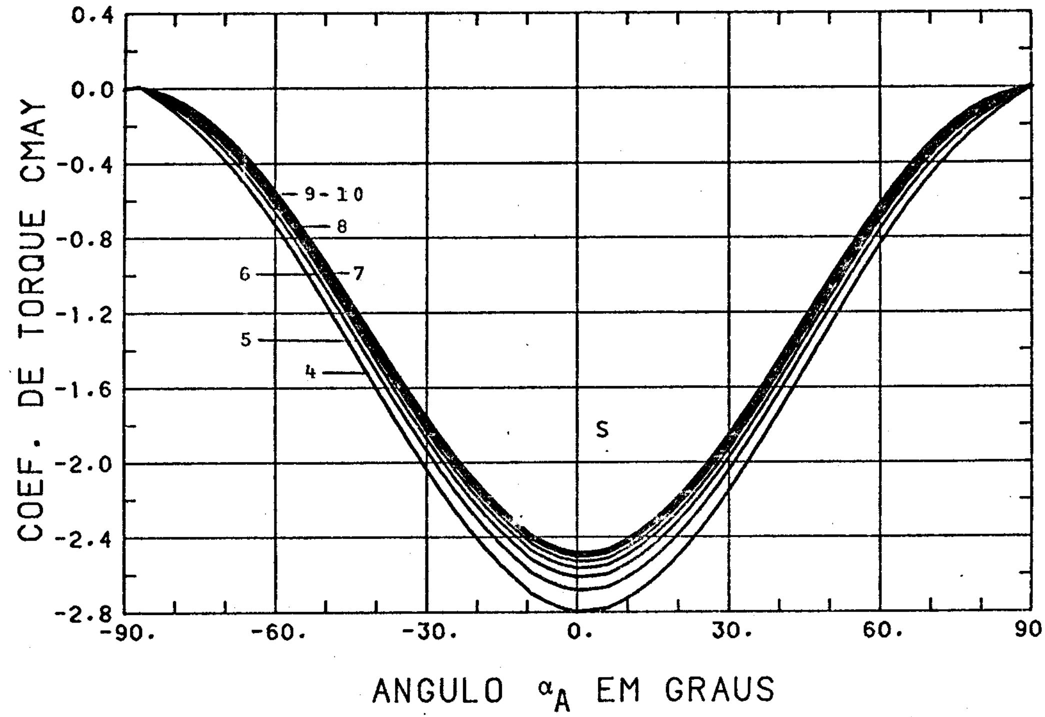

Fig. 7.9 - Coeficiente de torque no eixo Y^S do satélite, em função do ângulo α_A e de s, para $\beta_A = 0$ e $\sigma = \sigma' = T_W/T_i = 1$.

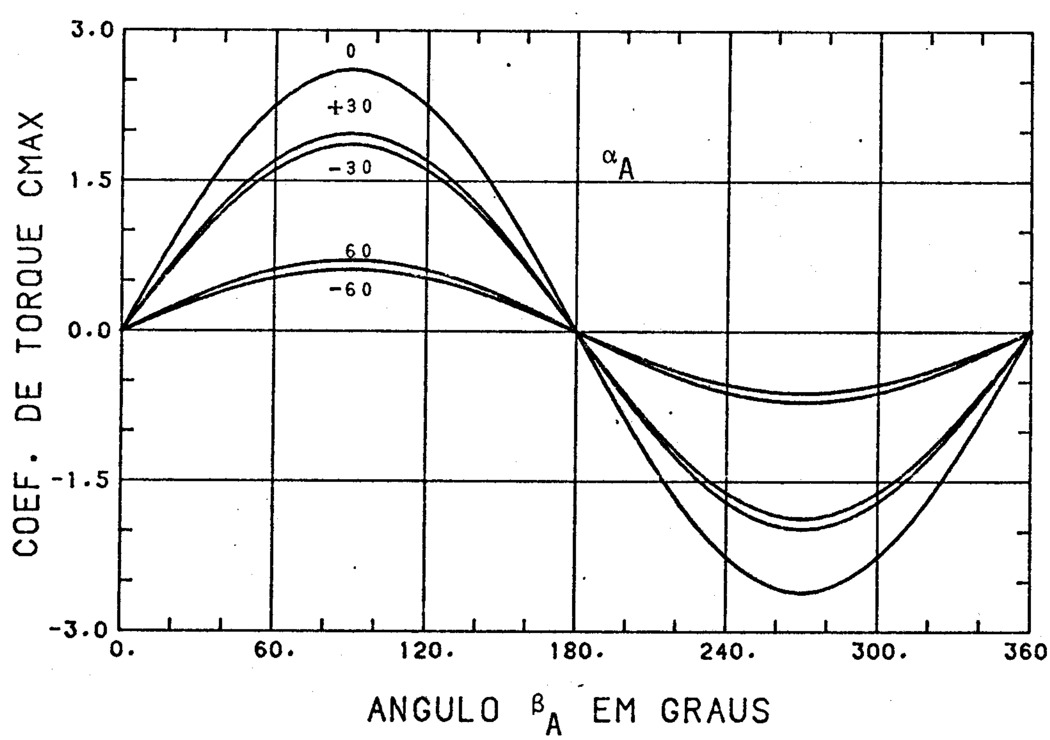

Fig. 7.10 - Coeficiente de torque no eixo X^S em função de α_A e de β_A ($\sigma = \sigma' = T_W/T_i = 1$, s = 6).

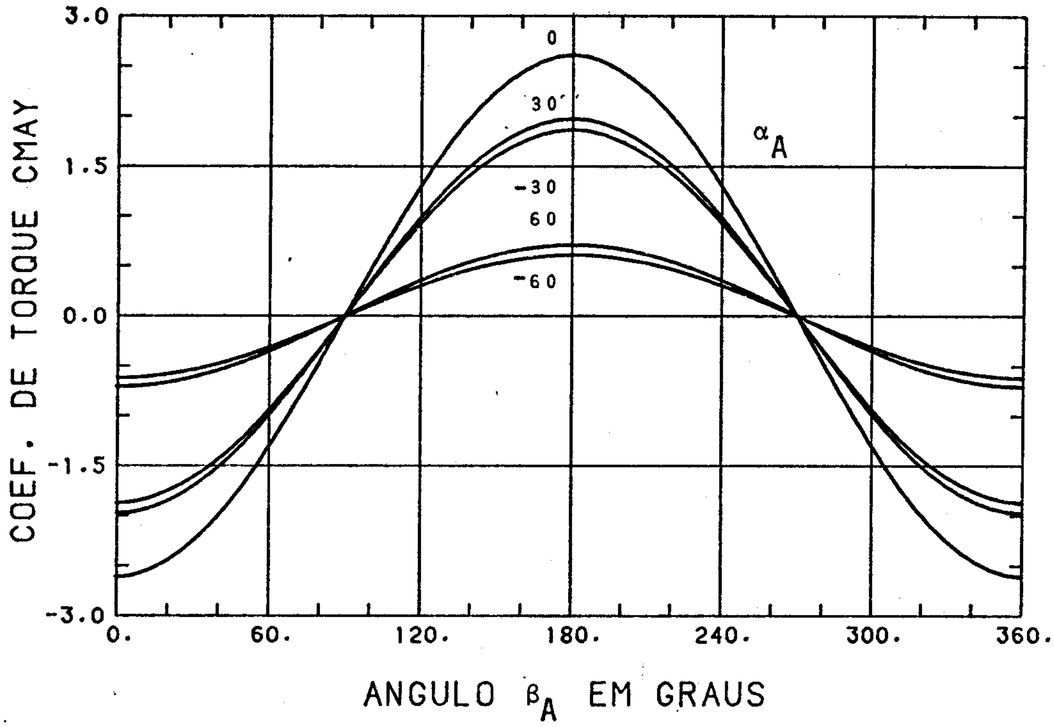

Fig. 7.11 - Coeficiente de torque aerodinâmico C_{MAY} no eixo Y^S em função de β_A e α_A ($s = 6$, $\sigma = \sigma' = T_w/T_i = 1$).

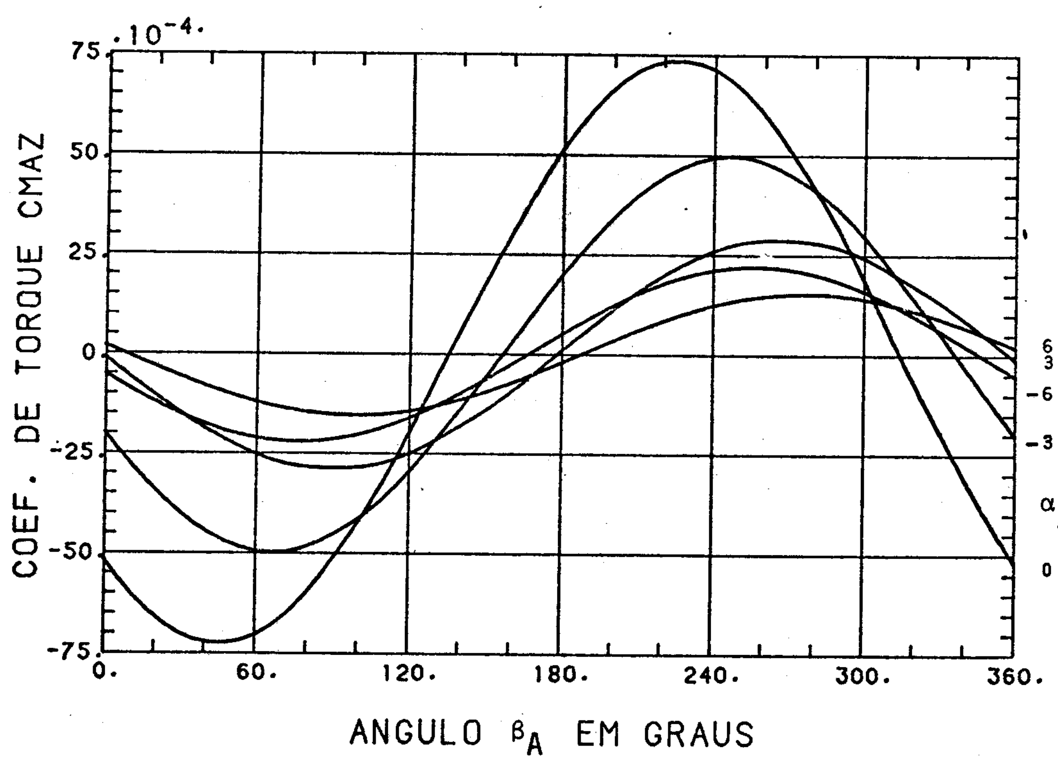

Fig. 7.12 - Coeficiente de torque no eixo Z^S em função de β_A e α_A ($s = 6$, $T_w/T_i = 1$ e $\sigma = \sigma' = 1$).

7.3 - COEFICIENTE DE FORÇA DE RADIAÇÃO

A radiação solar direta, ao incidir no satélite, pode fazê-lo sob ângulos maiores que no caso aerodinâmico, cujo vetor velocidade está sempre próximo ao plano X^SY^S devido à estabilização do satélite. Os ângulos de incidência α_R e β_R (Figura 7.13) fornecerão a direção do Sol no sistema do satélite, e, pelo exposto acima, α_R deverá variar de - 90^o a 90^o para que se possa ter uma total representação dos coeficientes de força e torque de radiação.

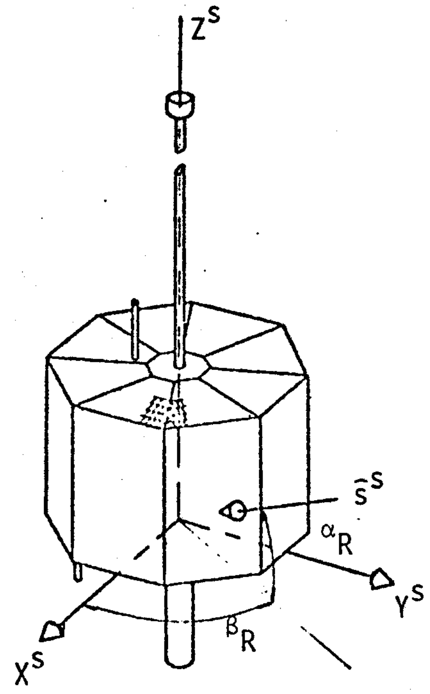

Fig. 7.13 - Ângulos de incidência α_R e β_R da radiação solar no sistema do satélite.

É importante salientar que esse tipo de estabilização, por gradiente de gravidade, tenta sempre anular a rotação própria do satélite em qualquer eixo que não seja perpendicular à órbita, Y^O. Como existem dissipações internas da energia rotacional do satélite, praticamente cessa o movimento do satélite com respeito ao sistema orbital, decorrido um certo intervalo de tempo após o lançamento. Assim, uma superfície que estiver exposta à radiação solar terá tempo suficiente para se aquecer, enquanto as superfícies encobertas irão se resfriar bastante antes de serem novamente iluminadas. A hipótese de superfícies adiabáticas, conforme definida na Seção 4.2, será então aproximadamente verdadeira; neste caso, o coeficiente ν da Equação 4.20 será adotado unitário.

De início, nota-se na Figura 7.14, a pequena influência da periodicidade em β_R no coeficiente de força de radiação, C_{RS}, dado pela Equação 4.28.

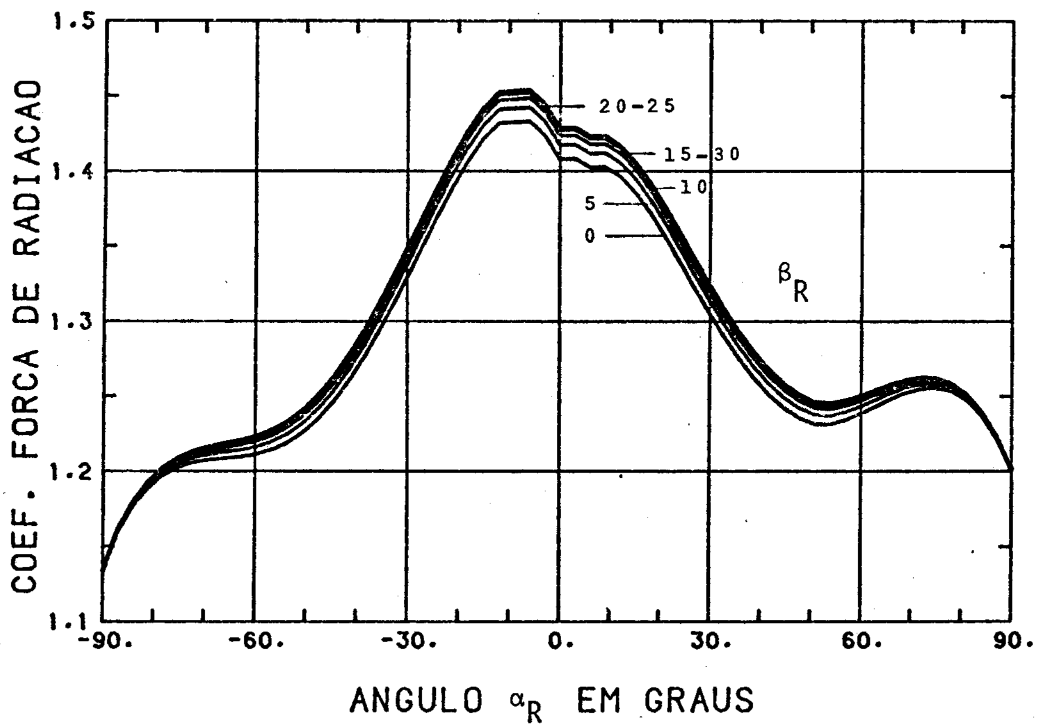

Fig. 7.14 - Coeficiente de força de radiação em função dos ângulos α_R e β_R (coeficiente de reflexão: $\gamma = \rho = 0,7$).

Entretanto, a configuração desta curva depende essencialmente dos valores de γ e ρ, reflectância e parcela especular da reflectância, respectivamente (no caso, $\gamma = \rho = 0,7$). É provável, porém, que γ será inferior a este valor, pois tendo o satélite 60% de sua área coberta por células solares, a reflectância média deverá estar próxima do valor das células, o qual varia de 0,05 a 0,15 (Wolf, 1971). Na Fi gura 7.15 nota-se a periodicidade em β_R, e, como era de se esperar, o coeficiente de força de radiação, C_{RS}, tem diminuído sua amplitude quando α_R se aproxima de seus extremos. As Figuras 7.16, 7.17 e 7.18 fornecem as componentes do coeficiente de força de radiação nos três eixos do sistema do satélite, $X^S Y^S Z^S$, respectivamente, onde se nota a total independência da força no eixo Z^S com variação em β_R. A influência de γ e ρ foi estudada nas Figuras 7.19 e 7.20. Note-se aqui que a reflexão especular ($\gamma = \rho = 1$) resulta em coeficientes menores que a difusa ($\gamma = 1$, $\rho = 0$), exceto para valores acentuados de α_R, quando a influência da face plana superior (9) ou inferior (11) se sobrepõe ao formato quase cilíndrico do satélite. As componentes do coeficiente de radiação da Figura 7.20 são mostradas nas Figuras 7.21, 7.22 e 7.23, em função do ângulo de incidência α_R.

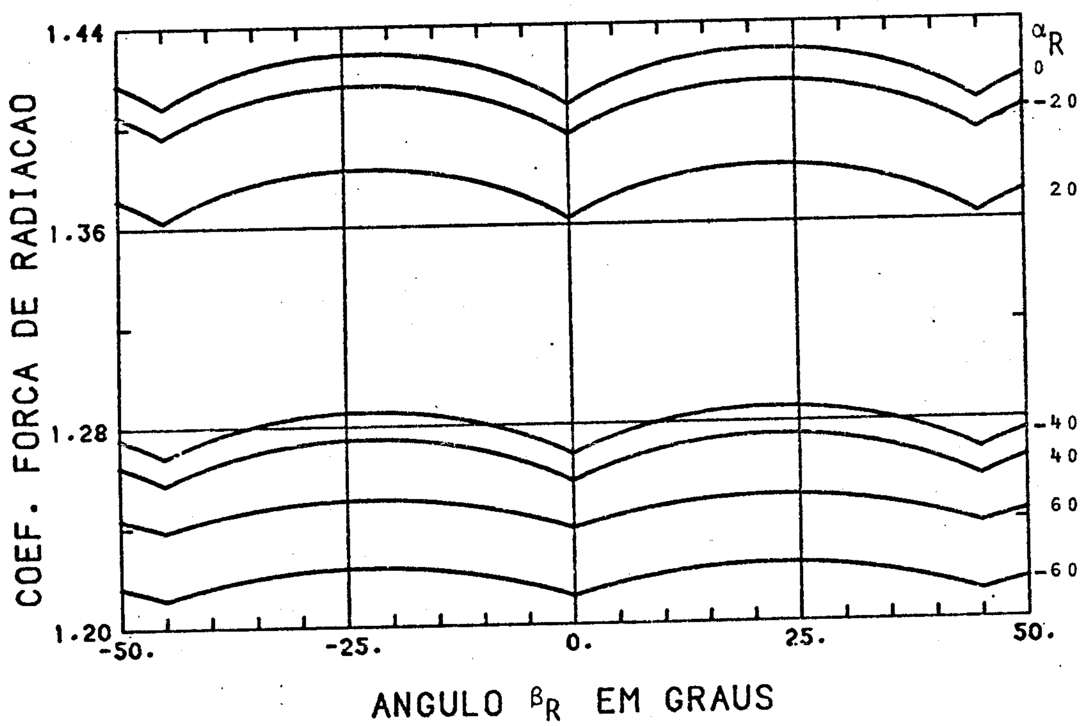

Fig. 7.15 - Coeficiente de força de radiação em função de β_R, para alguns valores de α_R ($\gamma = \rho = 0,7$).

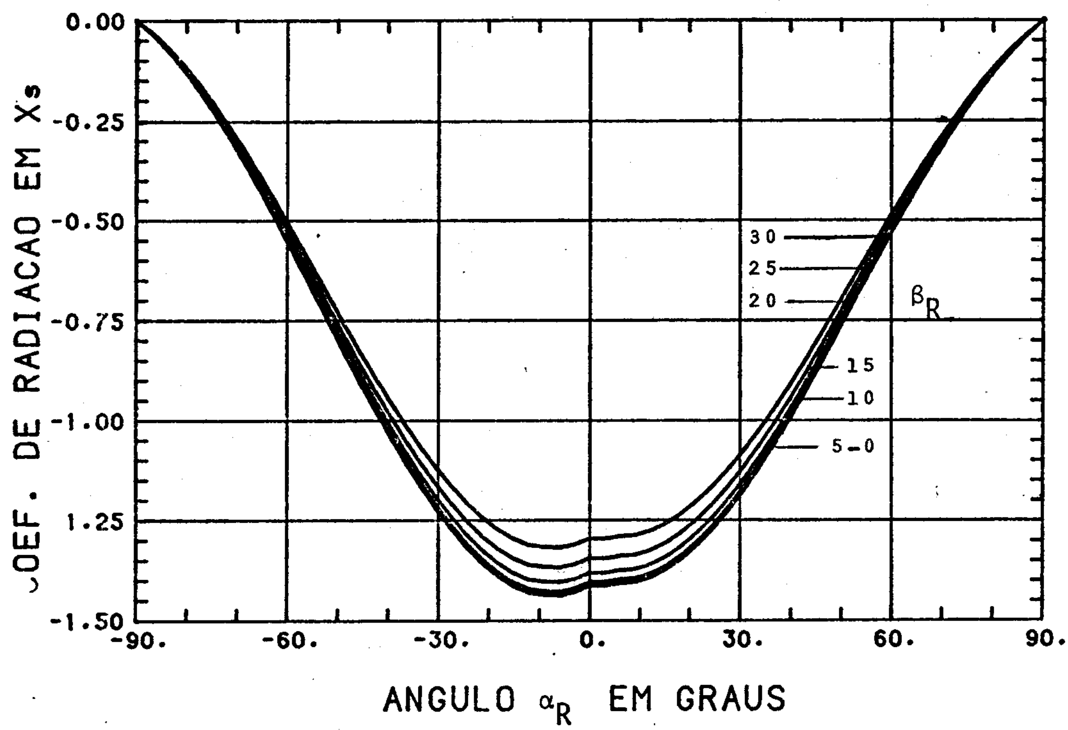

Fig. 7.16 - Componente do coeficiente de força de radiação no eixo X^s, em função de α_R e β_R, para $\gamma = \rho = 0,7$.

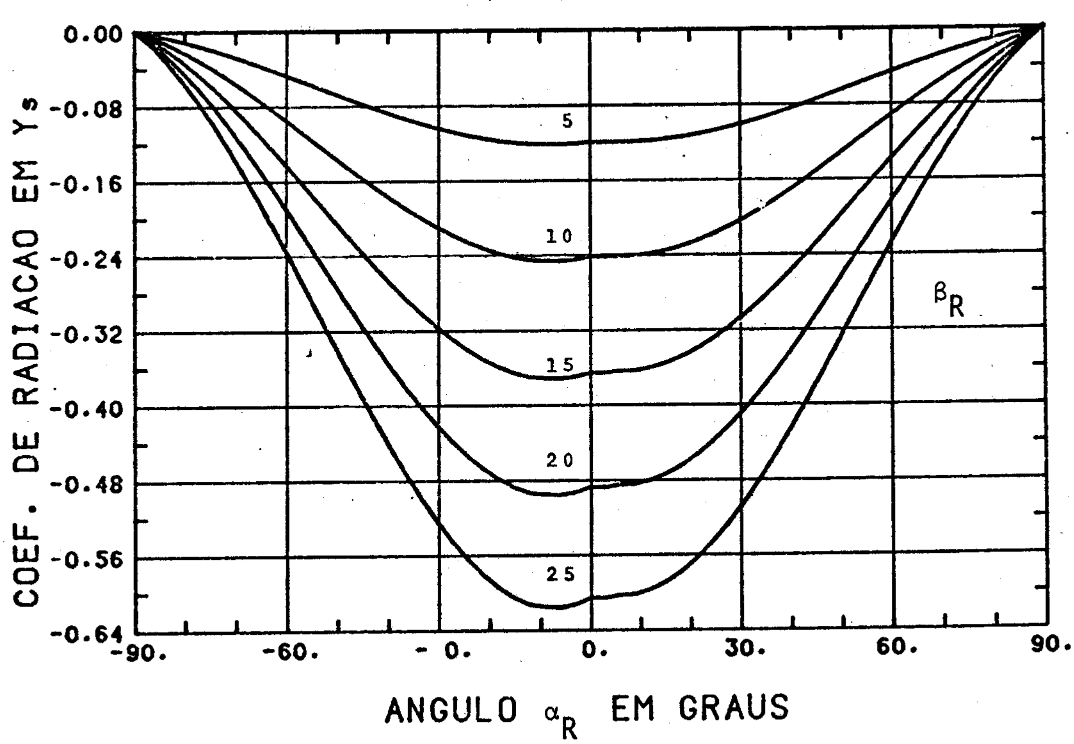

Fig. 7.17 - Componente do coeficiente de força de radiação no eixo Y^s, em função dos ângulos α_R e β_R, para $\gamma = \rho = 0,7$.

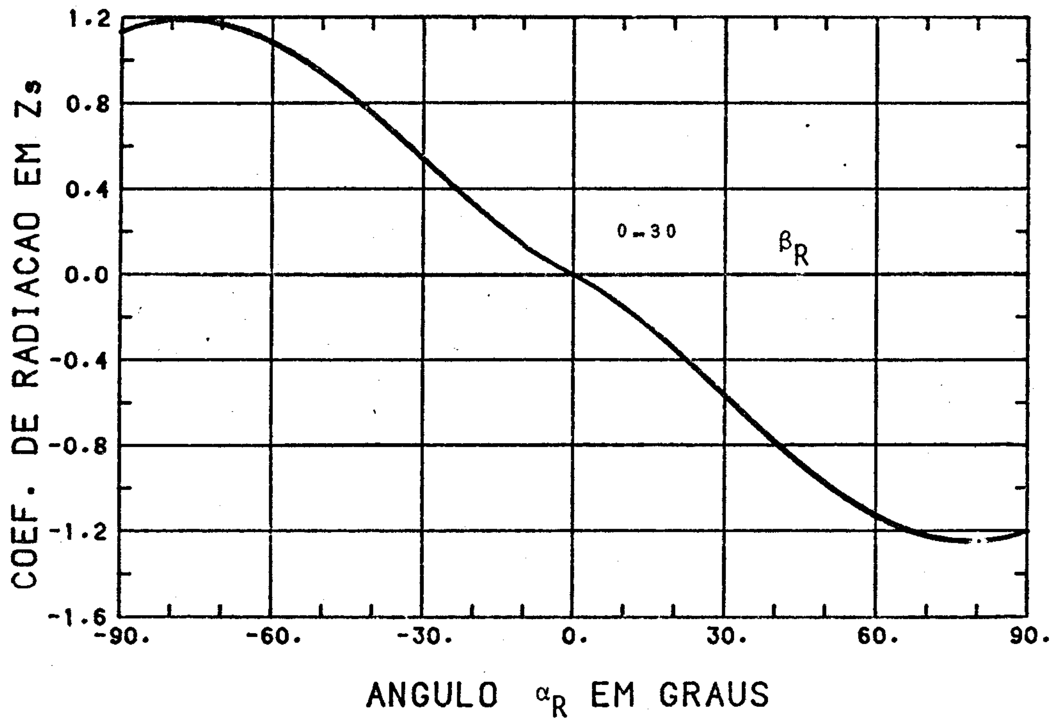

Fig. 7.18 - Coeficiente de força de radiação no eixo Z^S em função dos ângulos α_R e β_R (reflectância e parcela especular: $\gamma=\rho=0,7$).

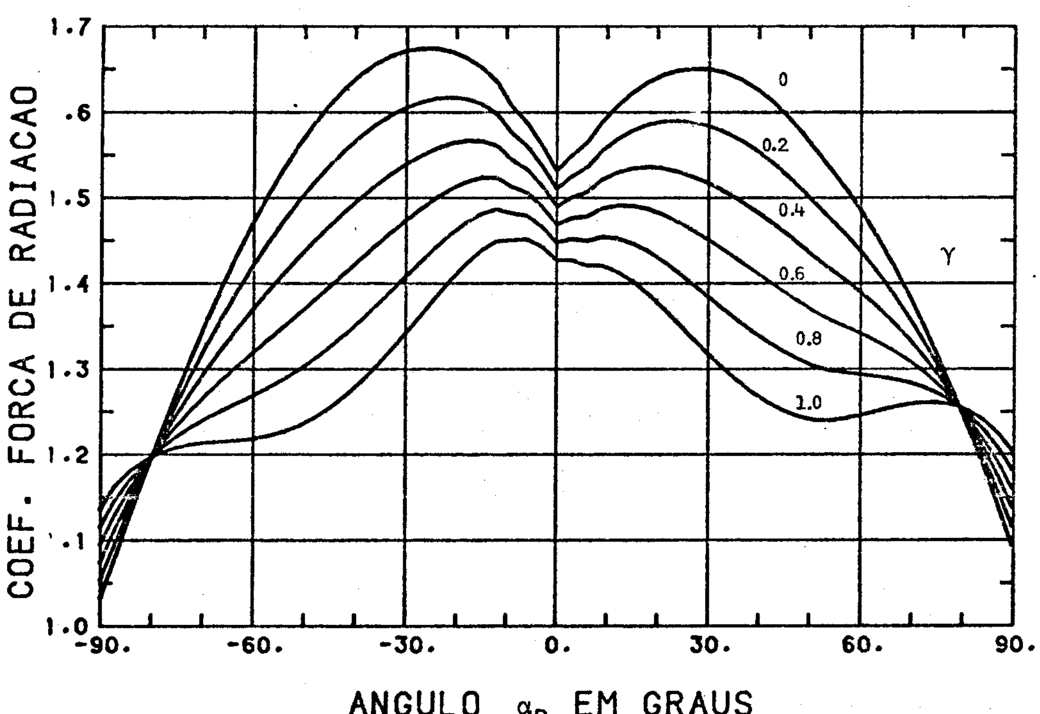

Fig. 7.19 - Influência da reflectância γ no coeficiente de radiação em função de α_R (β_R = 22,5^{o} e ρ = 0,5).

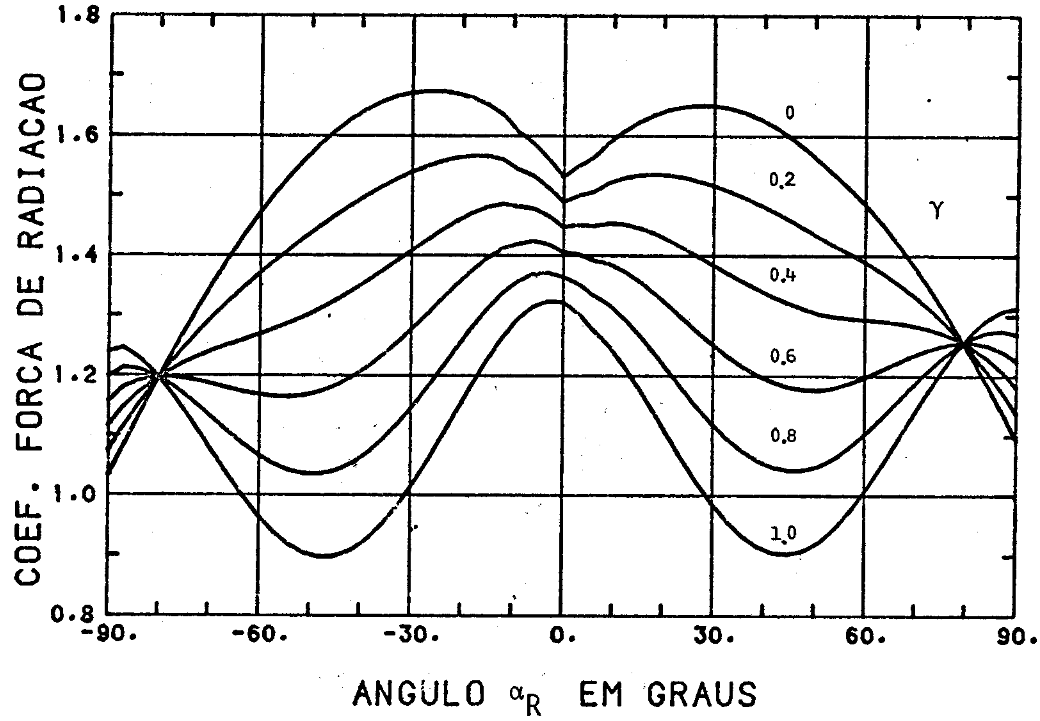

Fig. 7.20 - Influência de γ no coeficiente de força de radiação em função do ângulo α_R (β_R = 22,5° e ρ = 1,0).

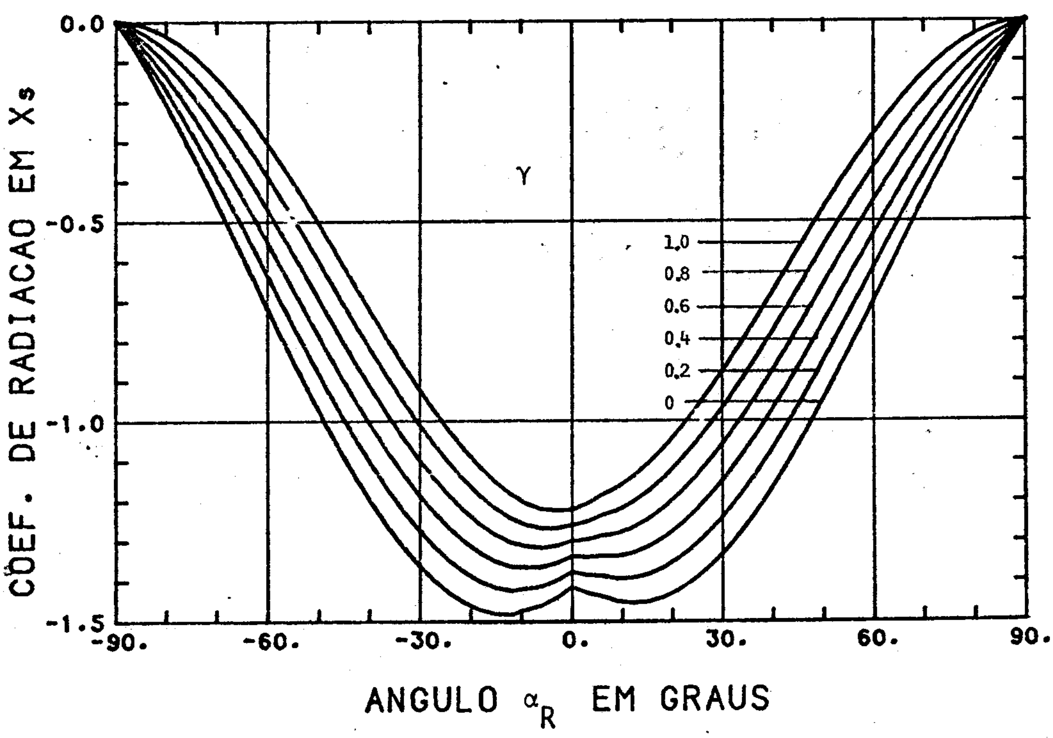

Fig. 7.21 - Componente do coeficiente de radiação no eixo X^S em função de α_R e γ (β_R = 22,5° e ρ = 1,0).

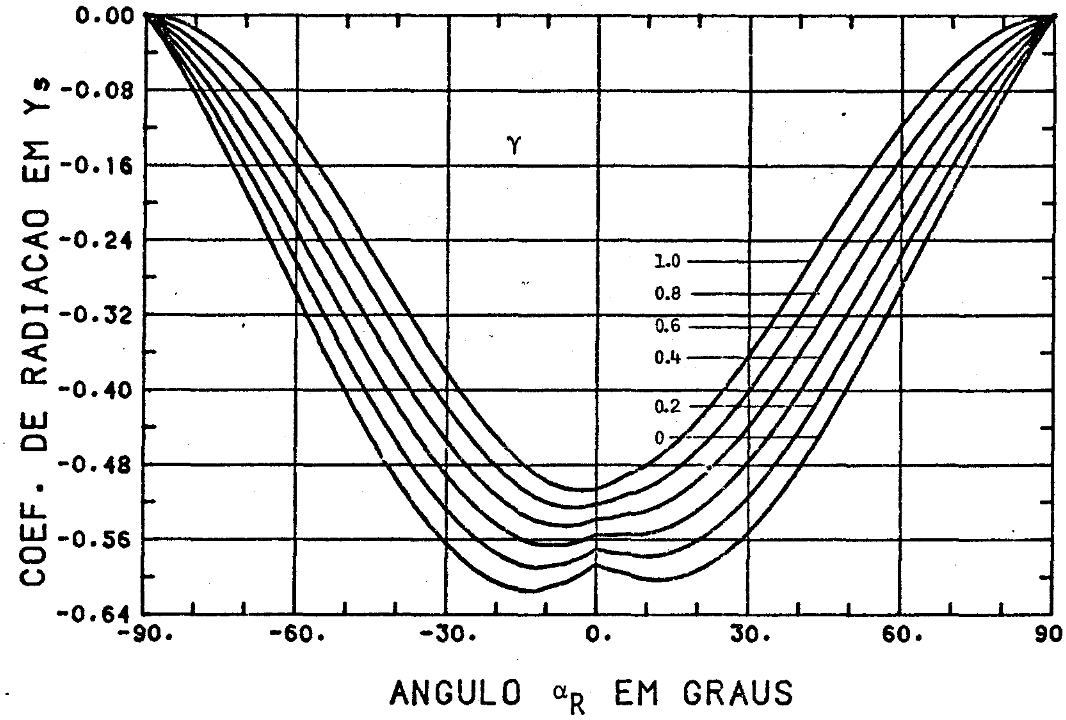

Fig. 7.22 - Coeficiente de radiação projetado no eixo Y^S, em função de α_R, para alguns valores de γ (β_R = 22,5º e ρ = 1,0).

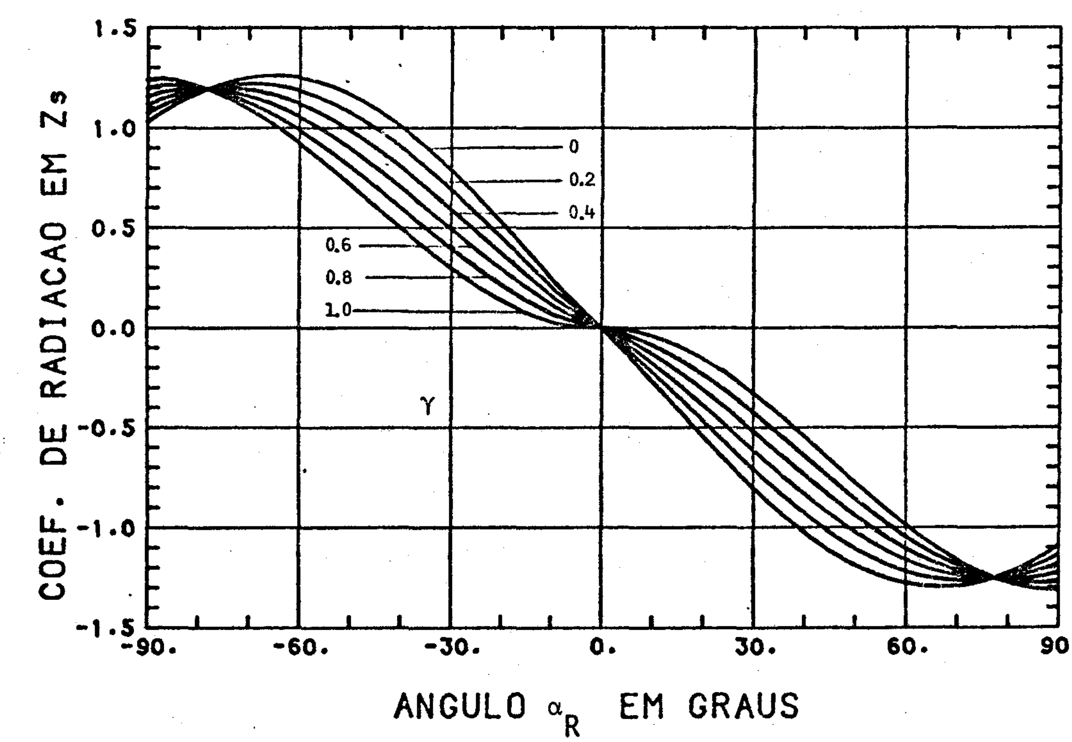

Fig. 7.23 - Componente no eixo Z^S do coeficiente de radiação em função de α_R e γ (β_R = 22,5º e ρ = 1,0).

Os coeficientes de torque de radiação, definidos nas Equações 4.30, 4.31 e 4.32, foram analisados nas Figuras 7.24 a 7.28. Novamente se nota a pequena influência da periodicidade em β_R nos torques e, devido à grande simetria do satélite com relação ao eixo Z^S, praticamente pode-se desprezar o torque neste eixo, pois possui magnitude três vezes menor que os demais. As Figuras 7.24 e 7.25, apresentam o comportamento do coeficiente de torque nos eixos X^S e Y^S, respectivamente, em função de α_R. O efeito da assimetria introduzido pelas pequenas antenas 18 e 19 pode ser visto nas Figuras 7.26 e 7.28, emboras a precisão dos cálculos, comprometida pela dificuldade na modelagem das áreas encobertas, seja aproximadamente da mesma ordem de grandeza destes coeficientes, o que os torna, portanto, pouco significativos. Nota-se na Figura 7.27 que o tipo de reflexão, especular ou difusa, pouco altera o torque de radiação e que, como no caso aerodinâmico, o centro de pressões da força de radiação localiza-se acima do centro de massa, o que provoca um torque sempre negativo no eixo Y^S quando $\beta_R = 0$.

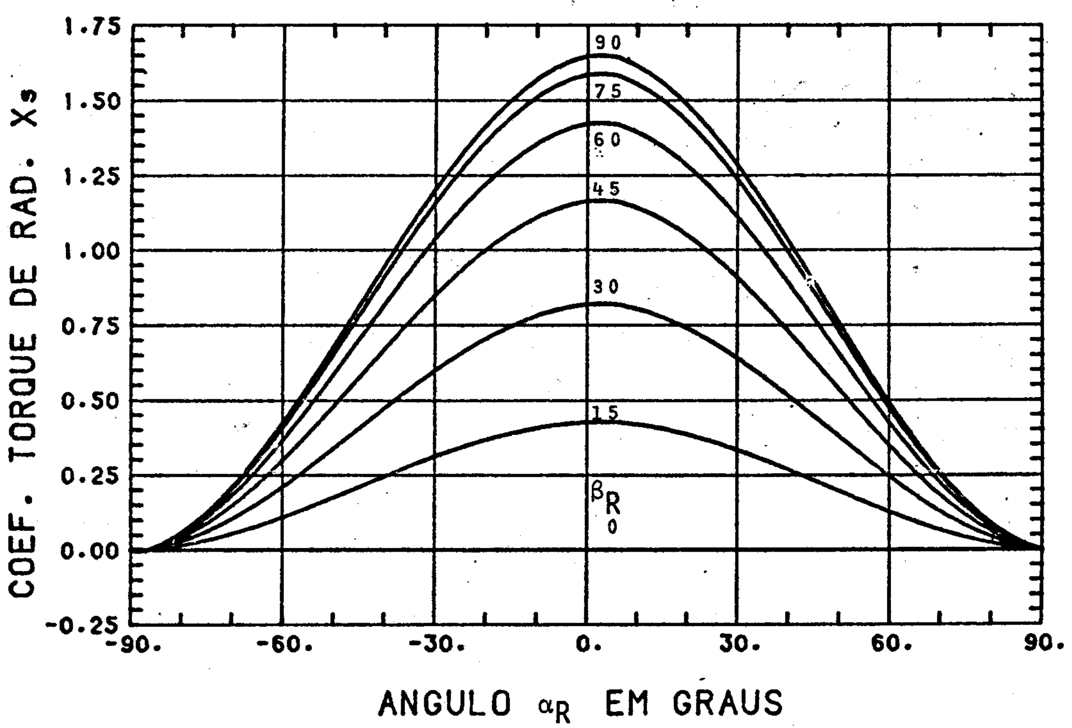

Fig. 7.24 - Coeficiente de torque de radiação no eixo X^S, em função de α_R e β_R ($\gamma = 0,7$ e $\rho = 0,7$).

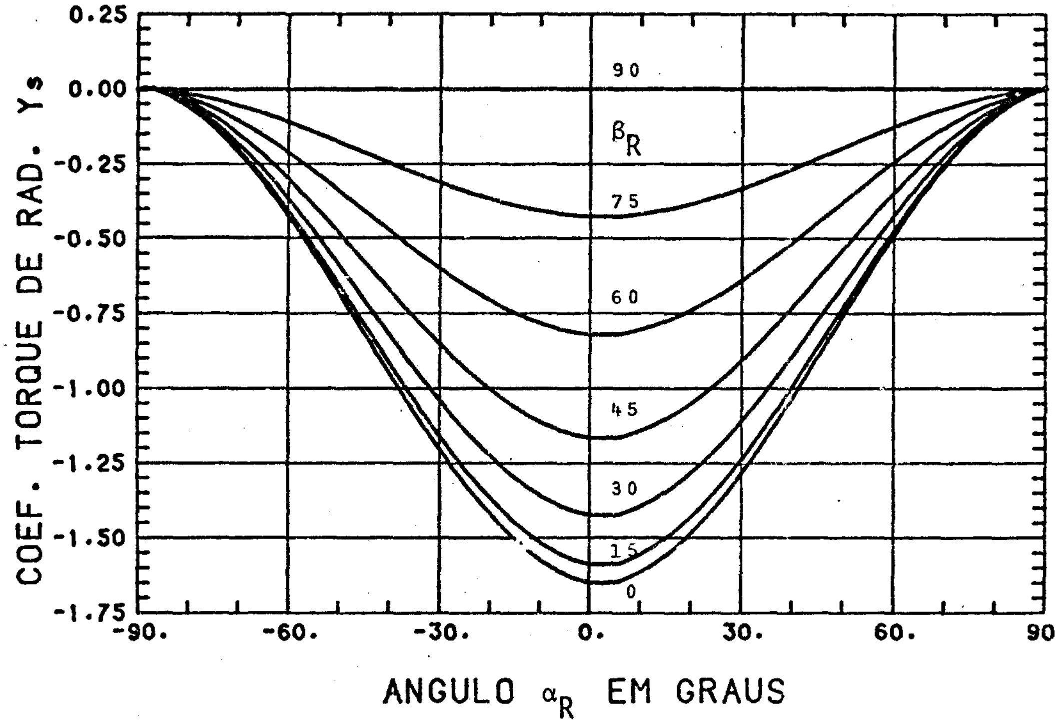

Fig. 7.25 - Componente do coeficiente de torque de radiação no eixo Y^S em função de α_R e β_R ($\gamma = \rho = 0,7$).

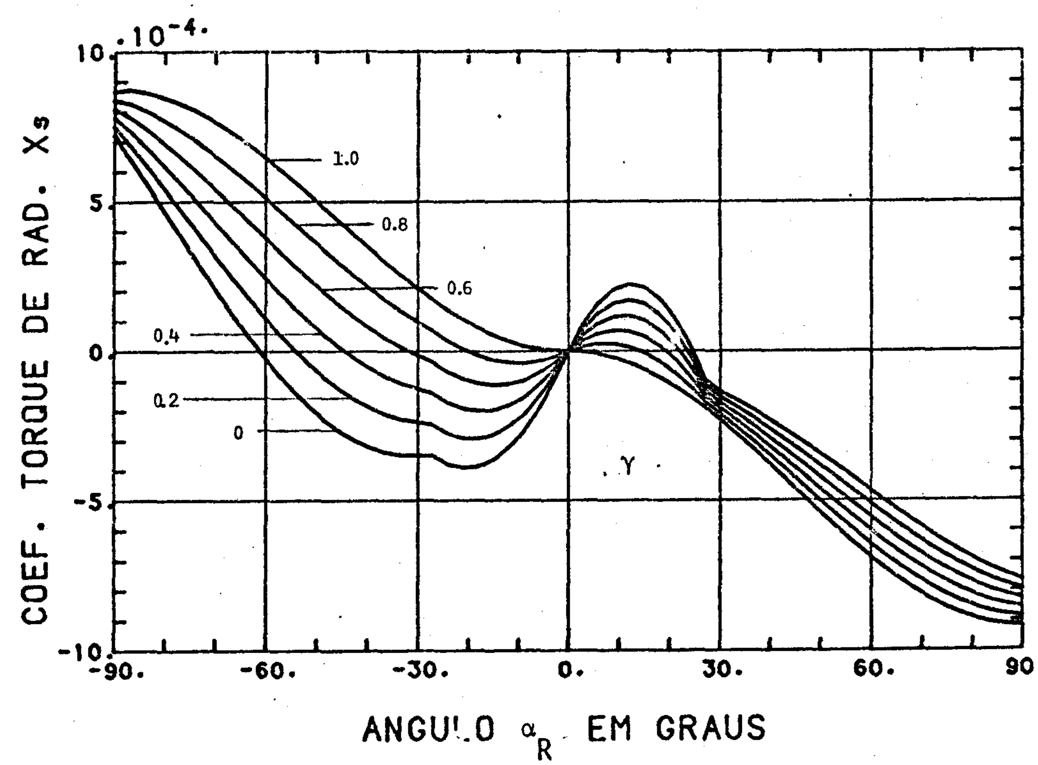

Fig. 7.26 - Coeficiente do torque de radiação no eixo X^S ($\beta_R = 0^o$, $\rho = 1,0$).

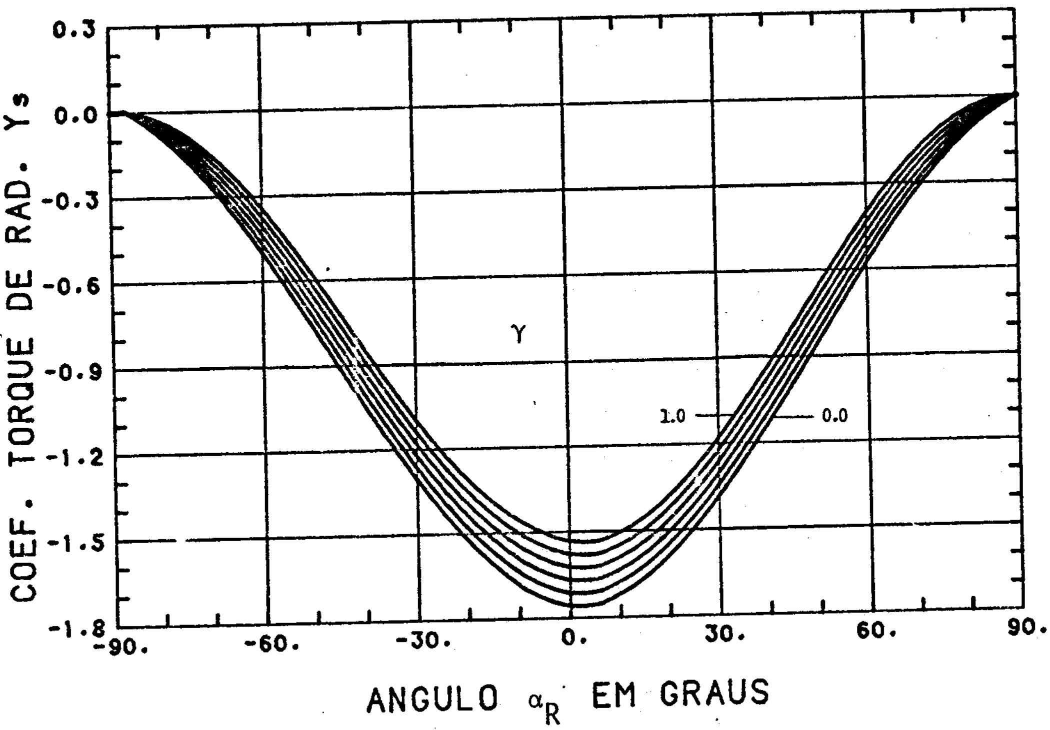

Fig. 7.27 - Coeficiente do torque de radiação no eixo Y^S em função do ângulo α_R e de γ (β_R = 0^o e ρ = 1,0).

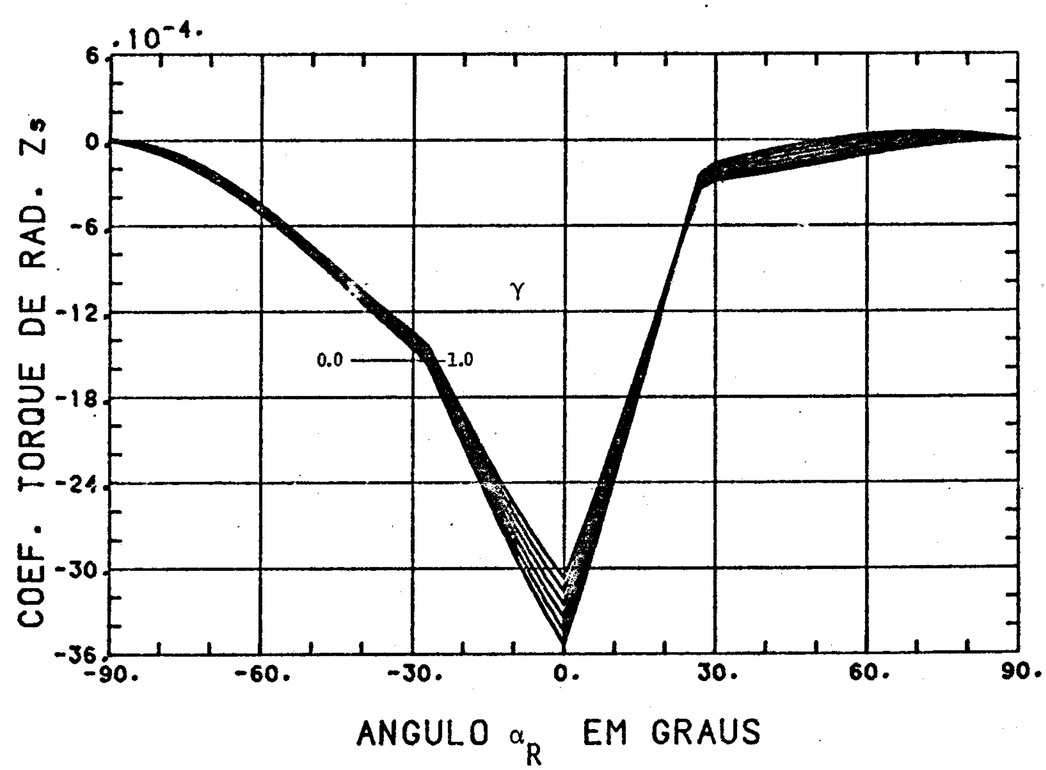

Fig. 7.28 - Coeficiente do torque de radiação no eixo Z^S em função de α_R e γ (β_R = 0^o e ρ = 1,0).

A análise dos coeficientes de força devidos ao albedo e à radiação terrestre torna-se complexa em virtude das inúmeras configurações possíveis para o sistema satélite-Terra-Sol. Para reduzir esse número de configurações, admitiu-se que o ângulo β_o (Figura 2.4), que relaciona o sistema do albedo com o sistema orbital, é nulo. Assim, estes dois sistemas ficarão coincidentes, sem perda de generalidade, pois o sistema do satélite continua com três graus de liberdade, através das rotações angulares ϕ_s, θ_s e ψ_s (Figura 7.29).

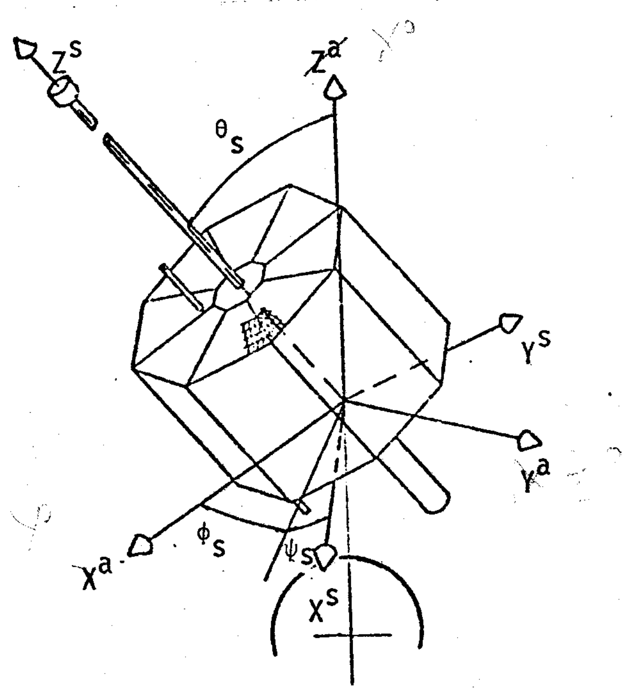

Fig. 7.29 - Ângulos de rotação ϕ_s, θ_s e ψ_s no sistema do albedo.

Os coeficientes de força do albedo nas direções vertical e horizontal, dados respectivamente pelas Equações 4.60 e 4.61, são vistos nas Figuras 7.30 e 7.31 em função do ângulo θ_o, formado pela direção do Sol e pelo eixo Z^a, para algumas altitudes entre 500 e 800 km. Para θ_o maior que 90^o, as forças devidas ao albedo praticamente se anulam, pois a região visível ingressa na sombra da Terra. Note-se também que o coeficiente horizontal do albedo, além de ser no caso negativo (indica que a força atua no sentido contrário a Y^a), é sensivelmente menor, em módulo, que a componente vertical para $\phi_s = \theta_s = \psi_s = 0$. Atin ge seu ponto de máximo valor em módulo para valores de θ_o próximos a 70^o, sendo nula em $\theta_o = 0^o$ por simetria e em $\theta_o > 100^o$ por se encontrar na sombra da Terra. Desta forma, a resultante das forças devida ao albedo mantém-se sempre próxima da vertical, mesmo para altos valores de θ_o. Nas Figuras 7.32, 7.33, 7.34 e 7.35 é vista a influência do ângulo ϕ_s nos coeficientes vertical e horizontal em função de θ_o e θ_s para $\phi_s = 0^o$ e $\phi_s = 90^o$. Verificou-se que a resultante no satélite pouco varia com os ângulos de atitude, θ_s e ϕ_s, pois a radiação incide no satélite subentendida num grande ângulo sólido, que é a região iluminada, o que provoca uma resultante quase constante.

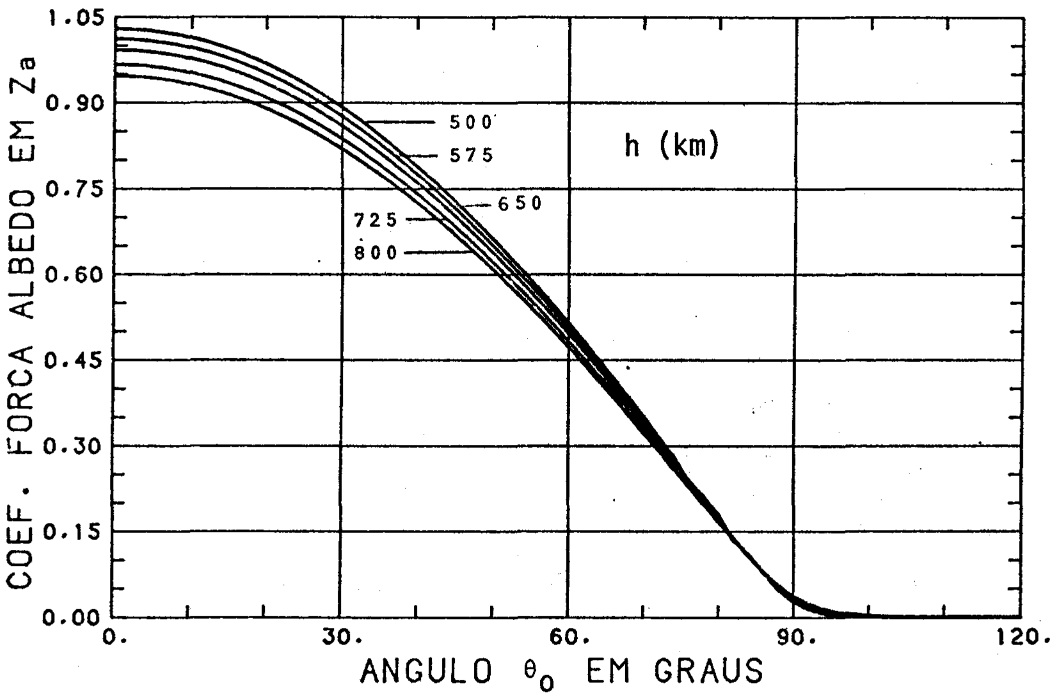

Fig. 7.30 - Componente do coeficiente de força do albedo na direção de Z^s em função de θ_o e da altitude h ($\gamma = \rho = 0,7$).

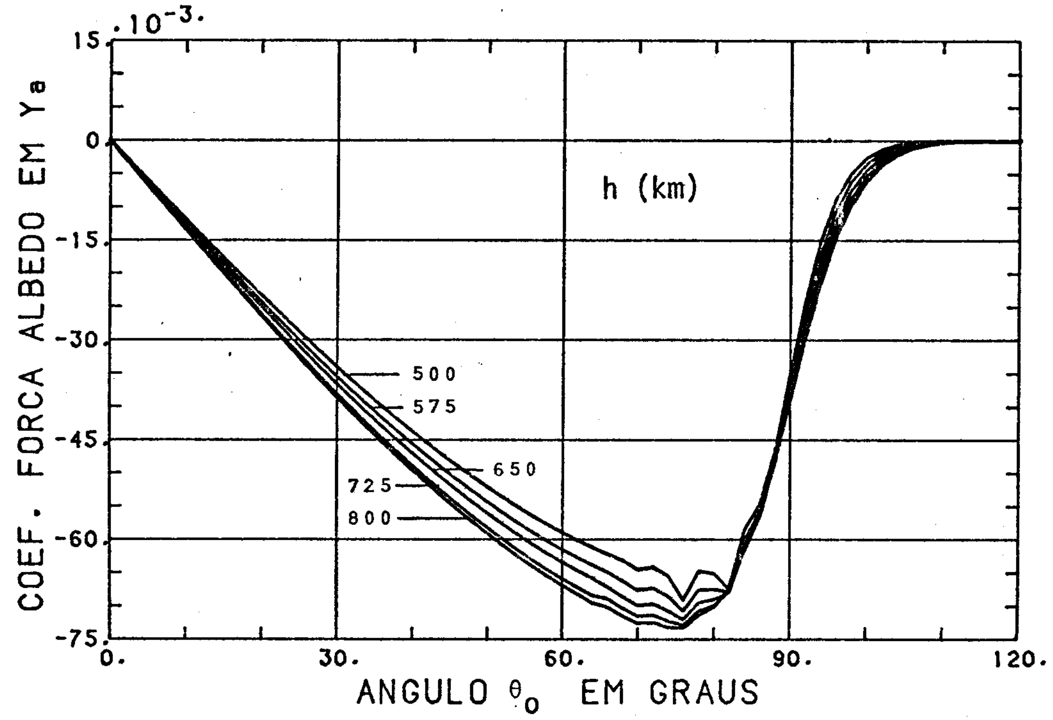

Fig. 7.31 - Coeficiente do albedo na direção horizontal, Y^S, em função de θ_o e de h ($\phi_s = \theta_s = \psi_s = 0$ e $\gamma = \rho = 0{,}7$).

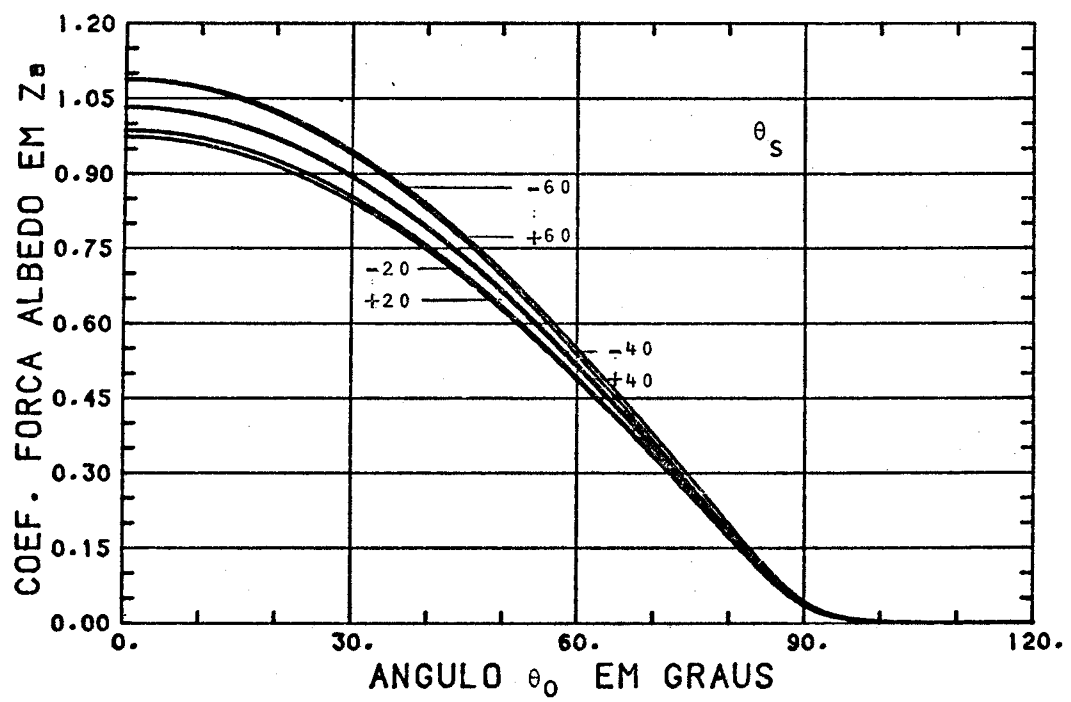

Fig. 7.32 - Componente vertical do coeficiente do albedo em função de θ_o e θ_s ($\gamma = \rho = 0{,}7$, $\phi_s = \psi_s = 0$ e h = 700 km).

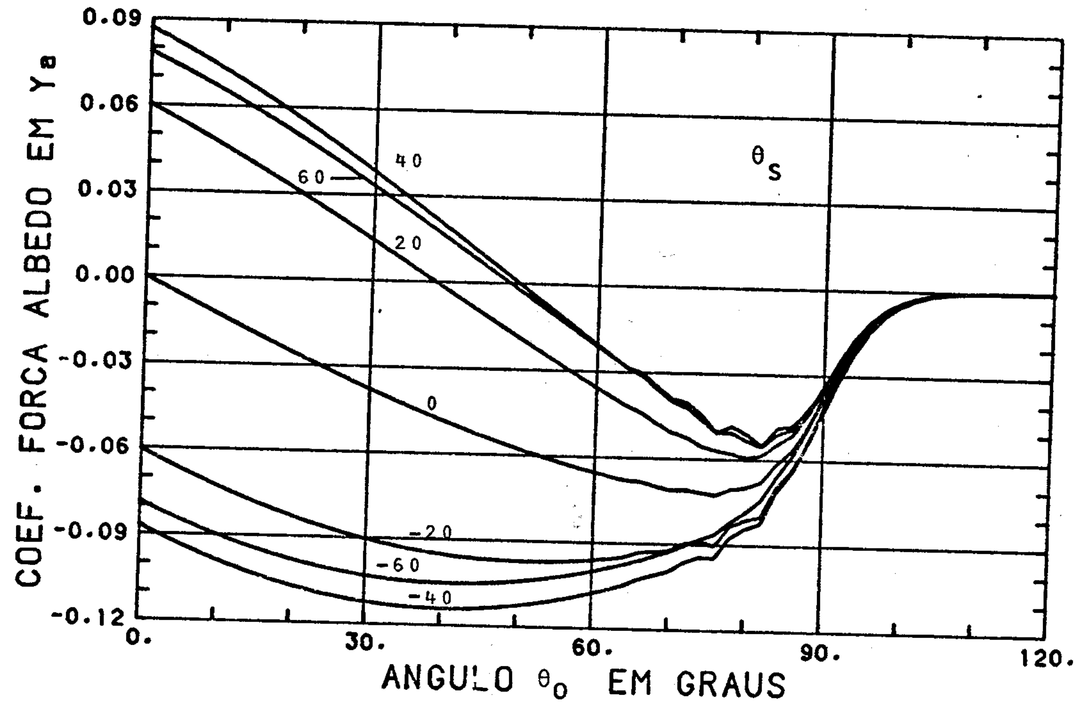

Fig. 7.33 - Componente horizontal do coeficiente do albedo em função de θ_o e θ_s (ϕ_s = ψ_s = 0; γ = ρ = 0,7 e h = 700 km).

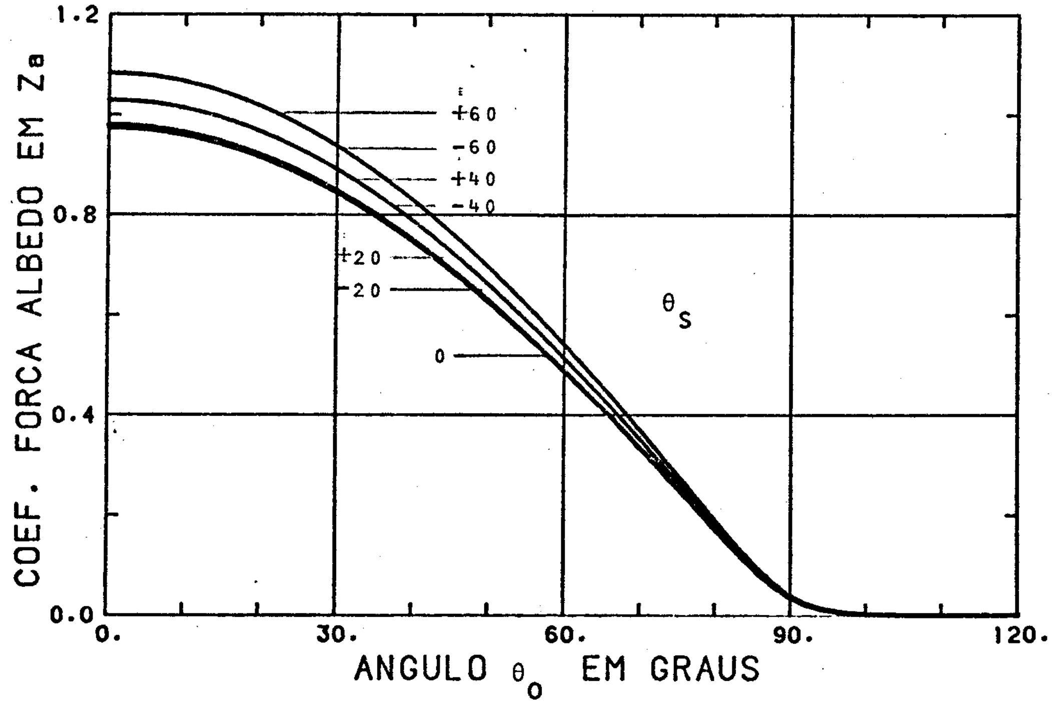

Fig. 7.34 - Componente vertical do coeficiente do albedo em função de θ_o e θ_s (ψ_s = 0, ϕ_s = 90°, γ = ρ = 0,7 e h = 700 km).

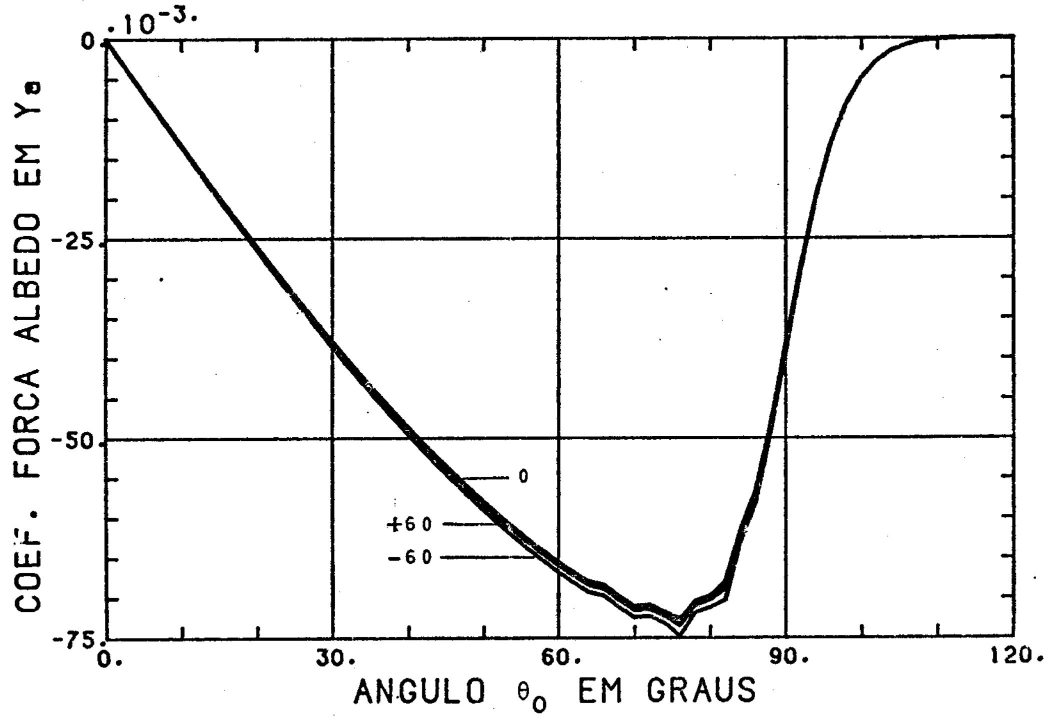

Fig. 7.35 - Componente horizontal do coeficiente do albedo em função de θ_0 e θ_s ($\gamma = \rho = 0,7$; $\phi_s = 60^0$; $\psi_s = 0$ e $h = 700$ km).

Quanto à reemissão terrestre, a Figura 7.36 mostra a influência da altitude no coeficiente vertical da radiação terrestre, onde se verifica que seus efeitos são pequenos (Seção 4.1). A variação dos coeficientes vertical e horizontal, dados pelas Equações 4.68 e 4.69, em função do ângulo θ_s é mostrada nas Figuras 7.37 e 7.38. Note-se que o ângulo ψ_s pouco influi no coeficiente vertical, da mesma forma que a componente da radiação solar direta no eixo Z^s não varia com β_R (Figura 7.18).

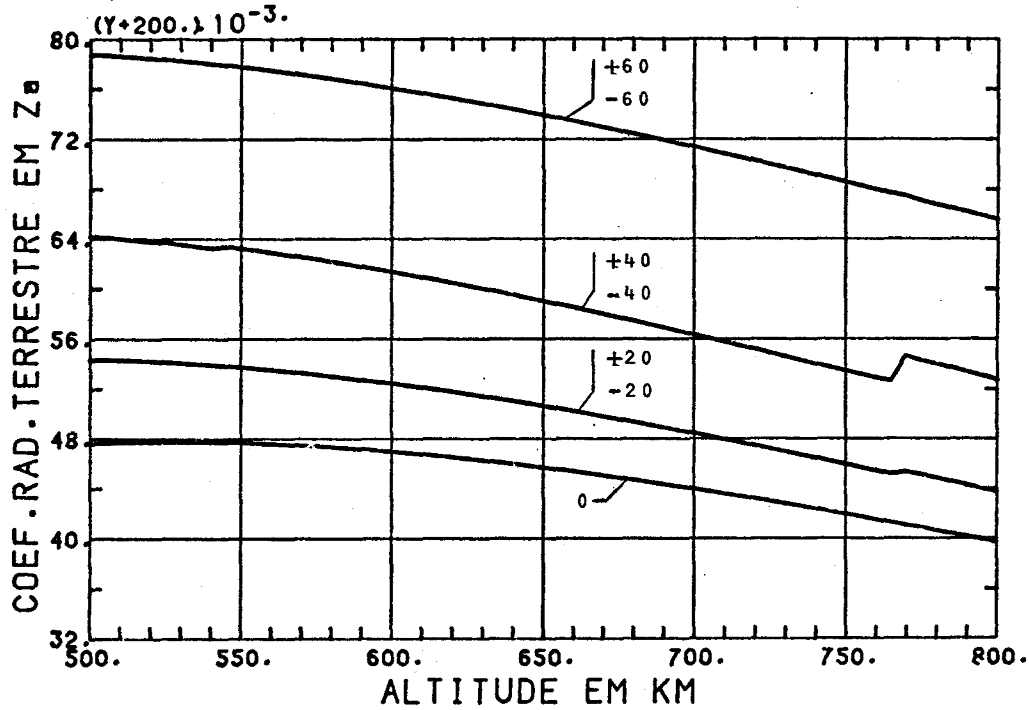

Fig. 7.36 - Coeficiente vertical da radiação terrestre em função de h e do ângulo θ_s ($\gamma = \rho = 0,7$; $\phi_s = \psi_s = 0^o$).

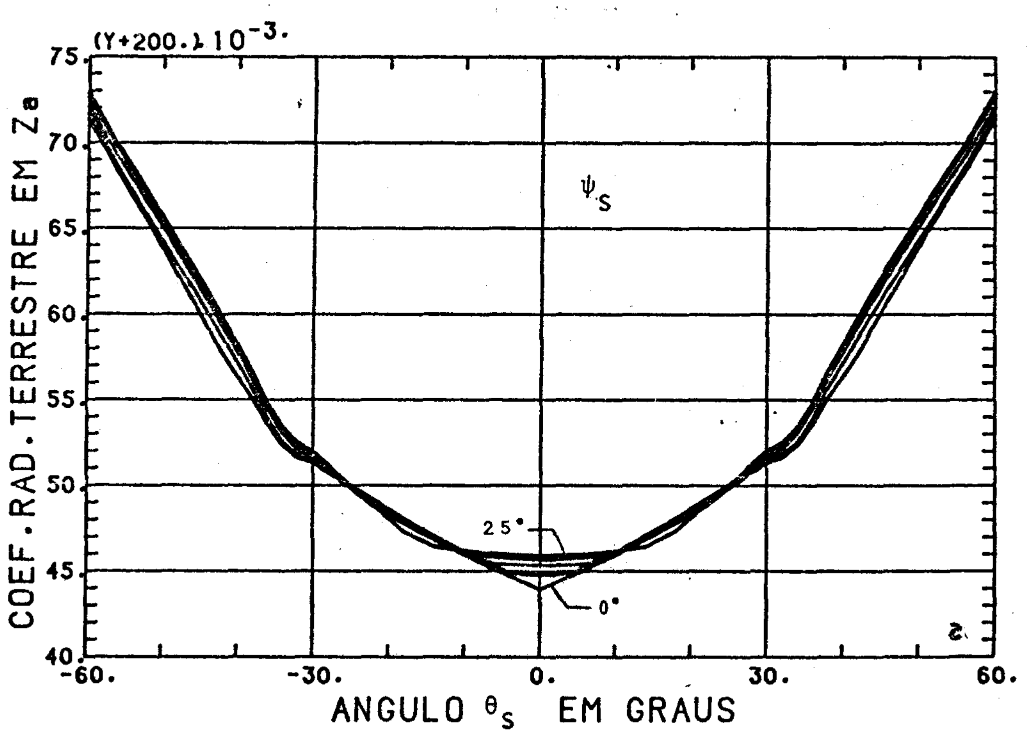

Fig. 7.37 - Componente vertical do coeficiente de radiação terrestre em função de θ_s e ψ_s (h = 700 km; ϕ_s = 0 e $\gamma = \rho = 0,7$).

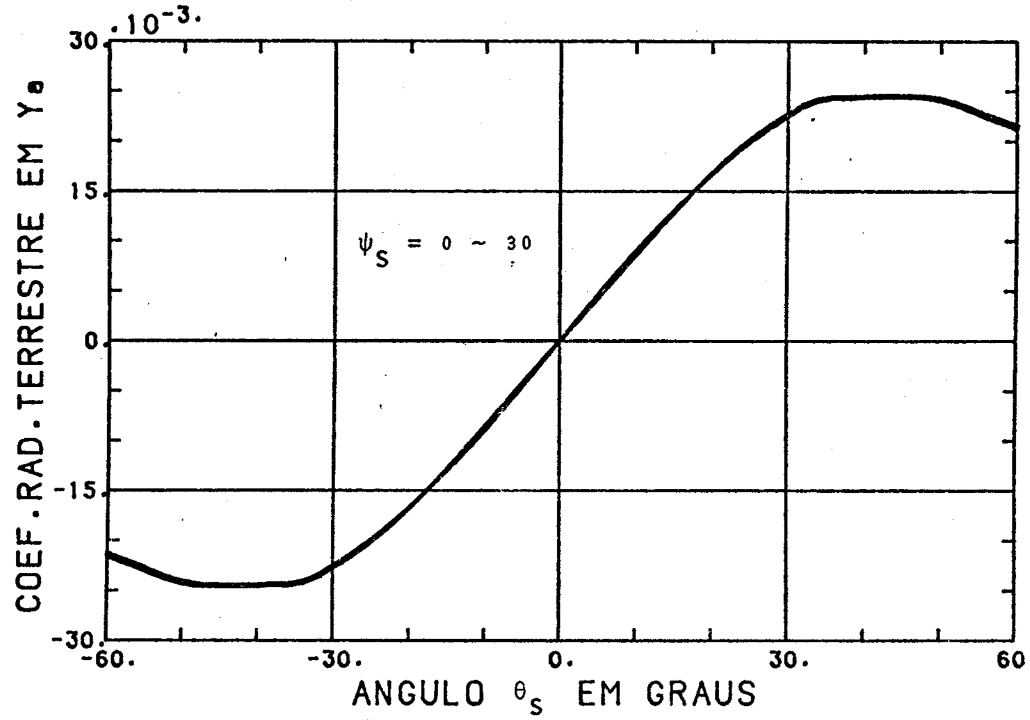

Fig. 7.38 - Coeficiente horizontal da radiação terrestre em função de θ_s e ψ_s (h = 700 km; ϕ_s = 0 e $\gamma = \rho = 0{,}7$).

7.4 - COEFICIENTES DO TORQUE DE GRADIENTE DE GRAVIDADE

Devido à prévia adoção da estabilização do satélite experimental por gradiente de gravidade, fica óbvio que este tipo de torque deverá possuir uma resultante que se sobreponha aos demais torques, de modo a garantir uma precisão preestabelecida de alinhamento entre o eixo Z^S e a vertical local. Embora diminuindo rapidamente com a distância ao centro da Terra, o torque de gradiente de gravidade, como será visto, se mantém superior ao torque aerodinâmico acima dos 400 km de altitude, embora só a partir dos 500 km garanta um razoável alinhamento com a vertical (aproximadamente 3^o).

Os coeficientes do torque de gradiente de gravidade estão mostrados nas Figuras 7.40, 7.41 e 7.42, nos eixos X^S, Y^S e Z^S, respectivamente, em função dos ângulos α_G e β_G, mostrados na Figura 7.39, que fornecem a direção do zênite local no sistema do satélite. Como os produtos de inércia I^S_{xy}, I^S_{xz} e I^S_{yz} adotados para este satélite são pequenos quando comparados com os momentos de inércia I^s_{xx}, I^s_{yy} e I^s_{zz}, dados pelas Equações 7.1a a 7.1f, o tensor de inércia é aproximadamente igual ao tensor principal de inércia. Assim, os eixos principais praticamente coincidem com o sistema geométrico $X^sY^sZ^s$ do satélite, e este se comportará então como se tivesse uma distribuição de massa análoga à de um halteres, cujo eixo coincide com o eixo Z^s. De fato, não se nota nas Figuras 7.40 e 7.41 a influência dos produtos de inércia, que deslocam os pontos onde o coeficiente de torque se anula para valores de α_G bastante próximos a -90^o, 0^o e 90^o, mas não exatamente iguais. Já na Figura 7.42, o coeficiente do torque de gradiente de gravidade no eixo Z^s é resultado dos produtos de inércia e da diferença entre I^s_{yy} e I^s_{xx}, de acordo com a Equação 5.8. Sua magnitude é portanto bastante reduzida, pois I^s_{yy} é pouco maior que I^s_{xx}, o que resulta em um coeficiente máximo aproximadamente 500 vezes menor que nos demais eixos.

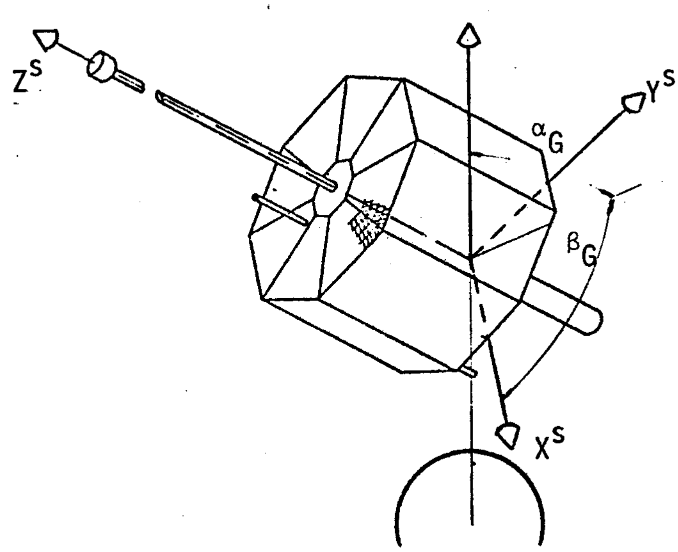

Fig. 7.39 - Ângulos α_G e β_G que fornecem a direção do versor Terra-satélite no sistema do satélite.

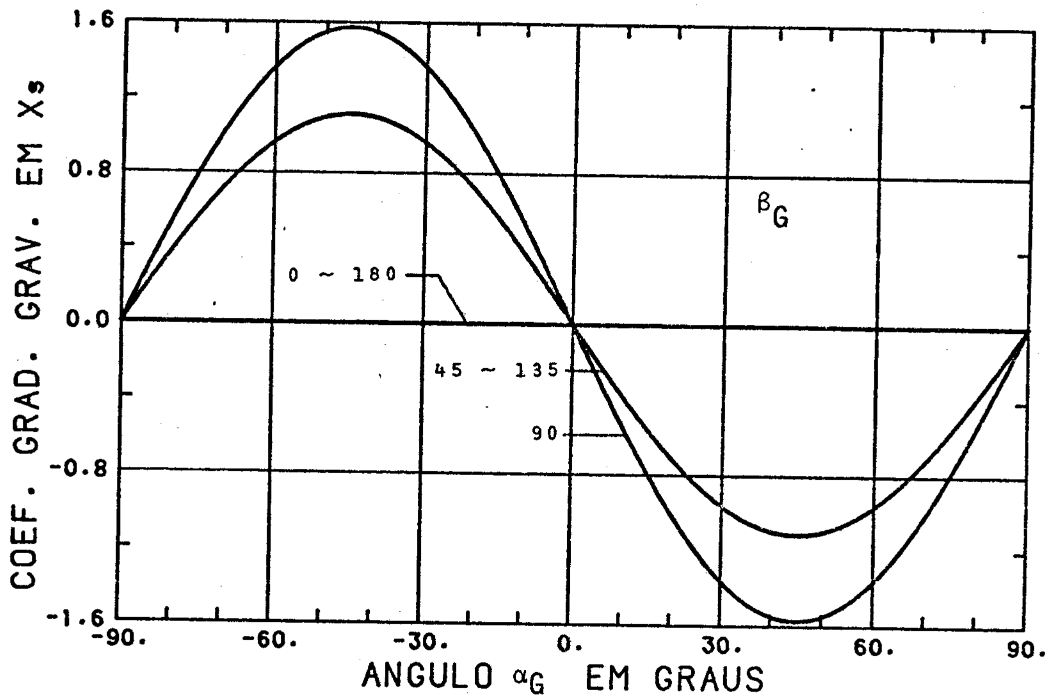

Fig. 7.40 - Coeficiente do torque de gradiente de gravidade no eixo X^S em função da direção do zênite local, α_G e β_G.

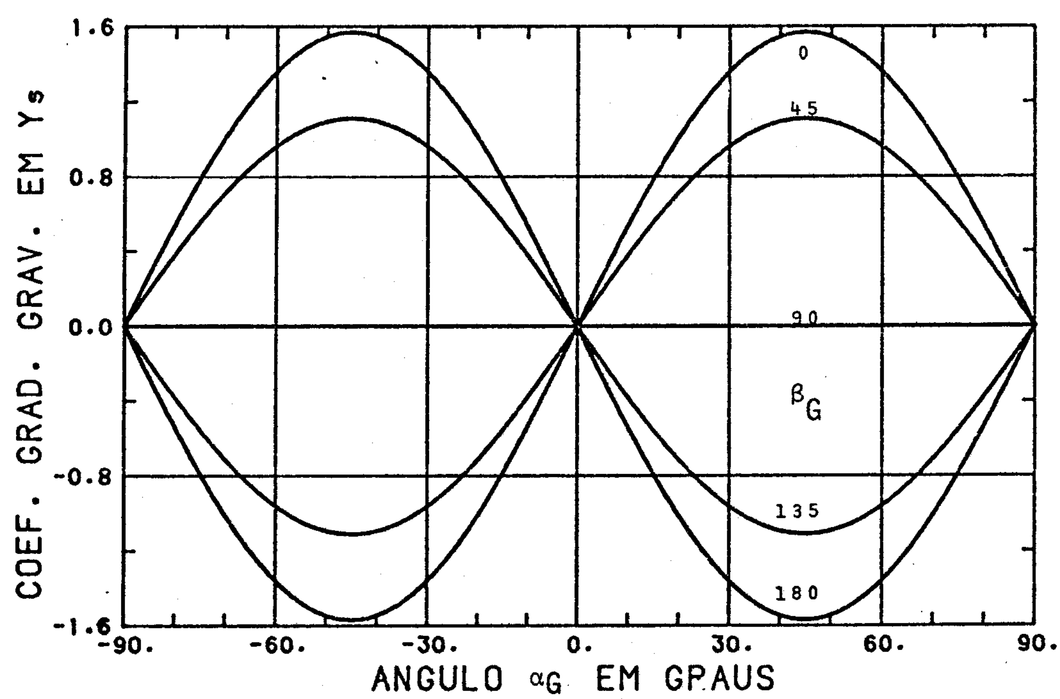

Fig. 7.41 - Coeficiente de torque de gradiente de gravidade no eixo Y^S em função dos ângulo α_G e β_G.

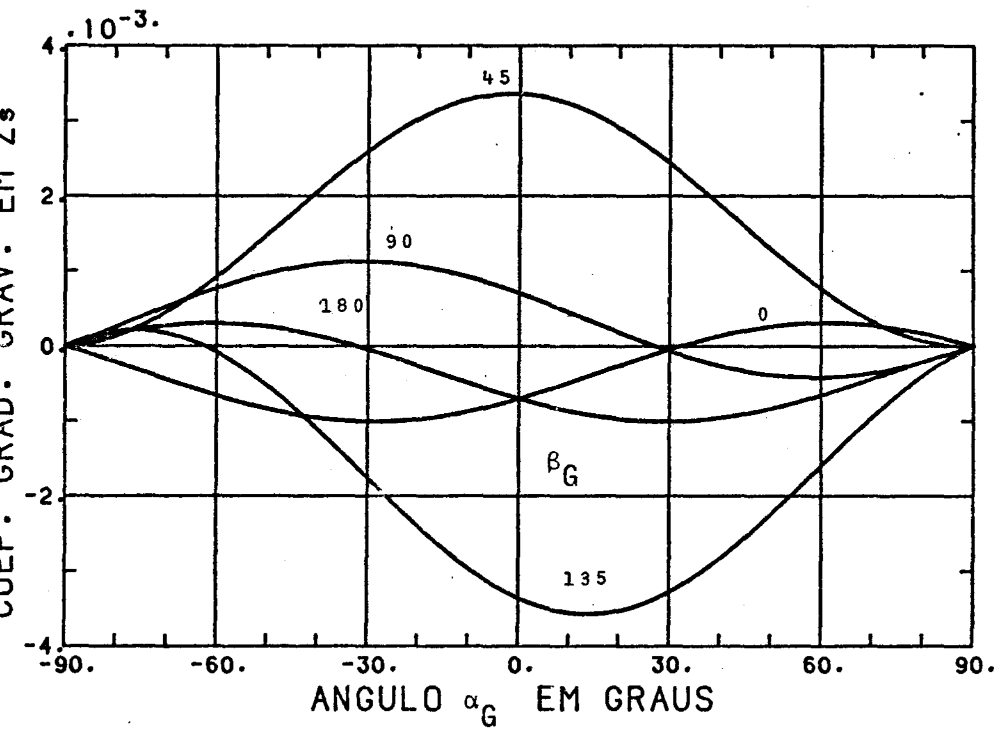

Fig. 7.42 - Coeficiente de torque no eixo Z^S, devido ao gradiente de gravidade, em função de α_G e β_G.

7.5 - FORÇAS E TORQUES AO LONGO DE UMA ÓRBITA

A análise das forças e torques que atuam neste satélite durante uma órbita é essencial para se ter, em primeiro lugar, a grandeza relativa de cada uma das forças, desprezando-se assim as menos influentes. Obtidas as forças, pode-se integrá-las ao longo de uma órbita, de forma a obter as variações causadas nos elementos orbitais. Para tanto, nas figuras as forças foram fornecidas não no sistema do satélite, mas sim no sistema orbital, a fim de facilitar a obtenção dessas variações.

As principais características e elementos orbitais do satélite foram admitidos nas condições 1), 2), 3) e 4) da Seção 7.1. Os valores adotados para σ, σ' e T_W/T_i foram unitários ao passo que será utilizado $\gamma = \rho = 0,7$. Embora as forças variem pouco com a orientação do satélite (aproximadamente 14% para a força aerodinâmica com s = 6), os torques dependerão essencialmente da atitude considerada. Como o mastro deverá alinhar-se sempre próximo à vertical local ao longo da órbi ta, e visto que não existe aparentemente um valor preferencial para o ângulo de guinada, adotar-se-á para fins de análise a seguinte orientação: $\phi_s = \theta_s = \psi_s = 0^o$ (Figura 7.43) com relação ao sistema orbital. Neste caso os dois sistemas - orbital e do satélite - estarão sempre coincidentes.

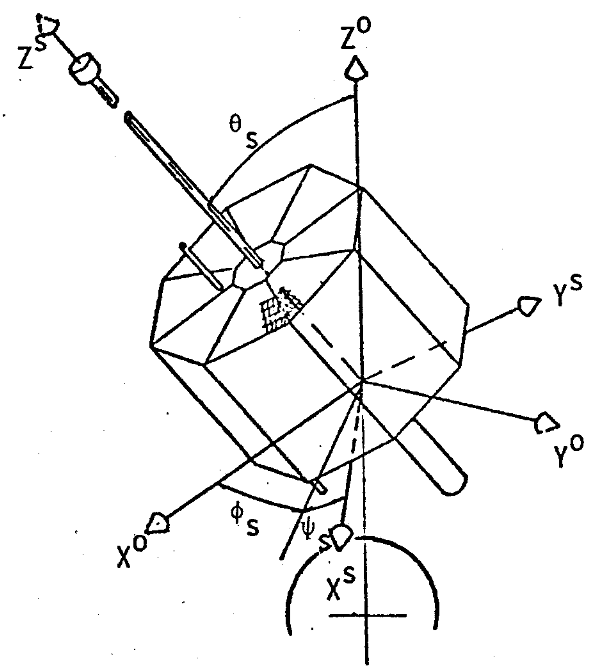

Fig. 7.43 - Ângulos de atitude ϕ_s, θ_s e ψ_s com relação ao sistema orbital.

A densidade, massa molecular média e temperatura local da atmosfera foram computados na sub-rotina ADEN, construída por Jacchia (1972) e listada no COSPAR (1972). Finalmente, o vetor Terra-Sol foi obtido numericamente em função da data, utilizando-se o modelo proposto por Flandern and Pulkkinen (1979), e implantado por Medeiros e Kuga (1980).

Escolheu-se inicialmente para ascensão reta do nodo ascendente $\Omega = 0$, de forma a resultar em uma órbita cujo plano formasse com o plano da eclítica um ângulo mínimo, igual à diferença entre a obliquidade da eclítica e a inclinação da órbita, ou seja, $1{,}45^o$.

Com essa configuração, o Sol encontra-se praticamente no plano orbital, conforme pode ser visto na Figura 7.44 cuja ascensão reta e declinação são dadas respectivamente por (figura 2.2):

$$\delta_o = 256{,}25^o, \tag{7.9}$$

$$\delta_o = -22{,}84^o. \tag{7.10}$$

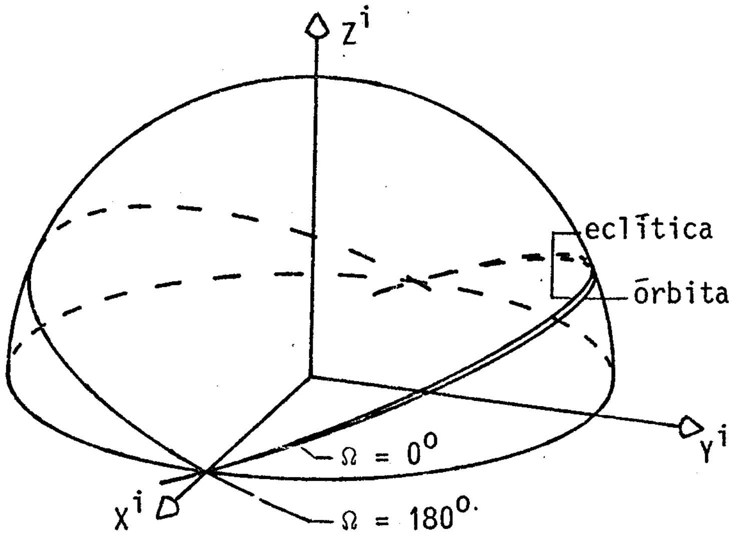

Fig. 7.44 - Configuração entre o plano orbital e a eclítica para $\Omega = 0^o$ e $\Omega = 180^o$.

Isto quer dizer que a resultante da força de radiação solar estará atuando quase no plano orbital, ou seja, terá suas maiores componentes nos eixos X^o e Z^o, do sistema orbital. Dessa forma pode-se comparar melhor sua magnitude com a força aerodinâmica predominante no eixo X^o. Outro caso singular ocorre quando a ascensão reta do nodo for 180^o, onde o ângulo entre o plano da órbita e o plano da eclítica é máximo (aproximadamente $45{,}5^o$). Note-se porém que, devido à precessão do nodo ascendente causada pelo achatamento da Terra, os extremos $\Omega = 0^o$ e $\Omega = 180^o$ estão separados entre si por apenas 30 dias, aproximadamente, numa órbita a 700 km de altura (Escobal, 1965).

Inicialmente foi simulada uma órbita com os elementos adotados na Seção 7.1 e com $\Omega = 0^o$; a seguir traçaram-se os gráficos das componentes da força e do torque, obtidos com a utilização do programa desenvolvido.

Nas forças mostradas nas Figuras 7.45, 7.46 e 7.47, observa-se que a resultante da radiação solar atua praticamente no plano X^o e Z^o, cujo módulo, embora maior, possui a mesma magnitude da força aerodinâmica. Esta última, como era esperado, atua basicamente no sentido contrário ao eixo X^o e, como pode ser visto na Figura 7.43, varia periodicamente ao longo da órbita. Essa variação é causada pela mudança na densidade atmosférica local, que, por sua vez, depende essencialmente da hora solar local (ângulo formado pelas projeções dos raios vetores do satélite e do Sol no plano do equador) (Jacchia, 1977). Note-se também que a força de radiação solar é simétrica com relação à origem; por isso, mesmo sendo maior que a aerodinâmica, seus efeitos na variação dos elementos orbitais são menores, pois não possuem efeitos cumulativos como esta última. O albedo e a radiação terrestre, como descritos na Seção 4.1, possuem uma força que atua praticamente na vertical, ou seja, no sentido positivo do eixo Z^o (Figura 7.47).

Quanto aos torques, mostrados nas Figuras 7.48, 7.49 e 7.50, nota-se de início a predominância do torque de gradiente de gravidade sobre os demais, pois o simples fato de o tensor de inércia do satélite não ser totalmente diagonal provoca um torque da mesma magnitude que os outros. Note-se também que, com essa geometria de órbita, os torques surgem quase totalmente no eixo Y^o, perpendicular ao plano da órbita (Figura 7.49). Podem-se considerar, neste caso, os torques nos outros eixos pouco significativos, pois possivelmente os de outras fontes, indicadas na Seção 6.6, serão maiores que estes.

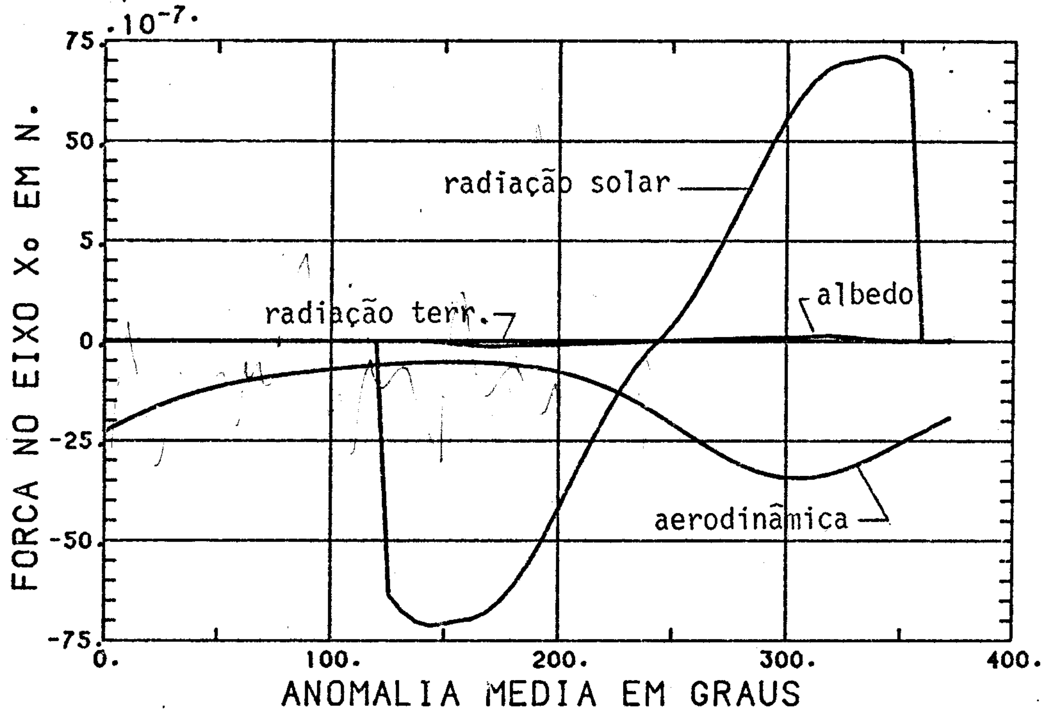

Fig. 7.45 - Forças em N no eixo X^O com os elementos orbitais iguais a: a = 7128 km (h = 750 km); $\Omega = 0$; e = 0,007; i = 22º; ω = 14,3º.

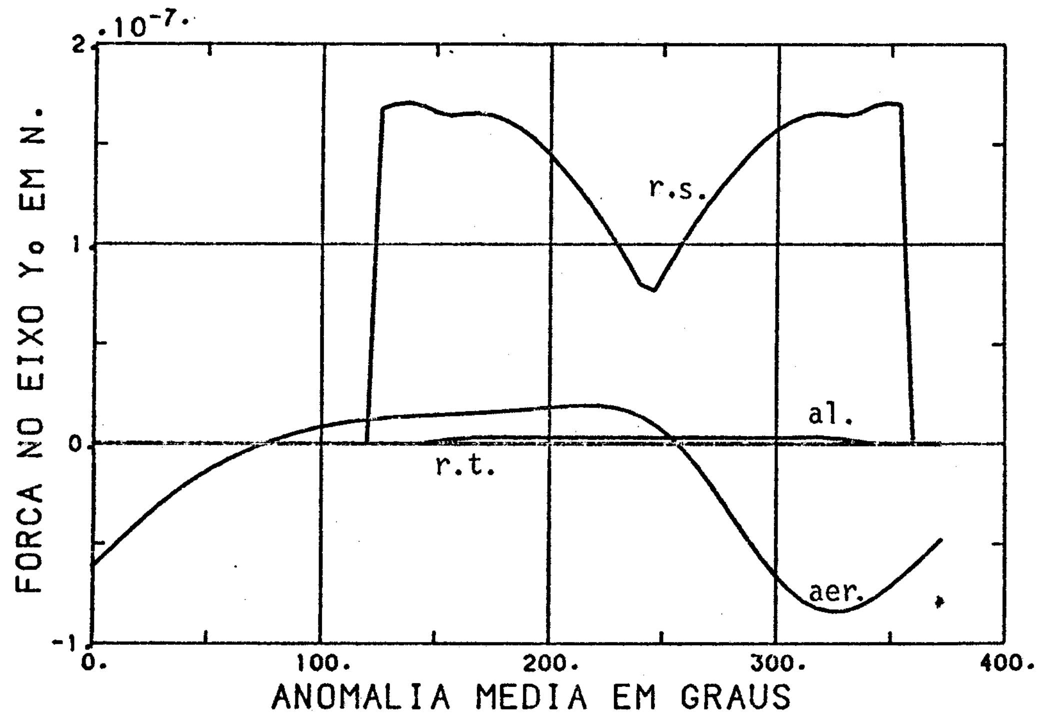

Fig. 7.46 - Forças em N no eixo Y^O, perpendicular ao plano orbital (a = 7128 km, e = 0,007, i = 22º, Ω = 0º e ω = 14,3º).

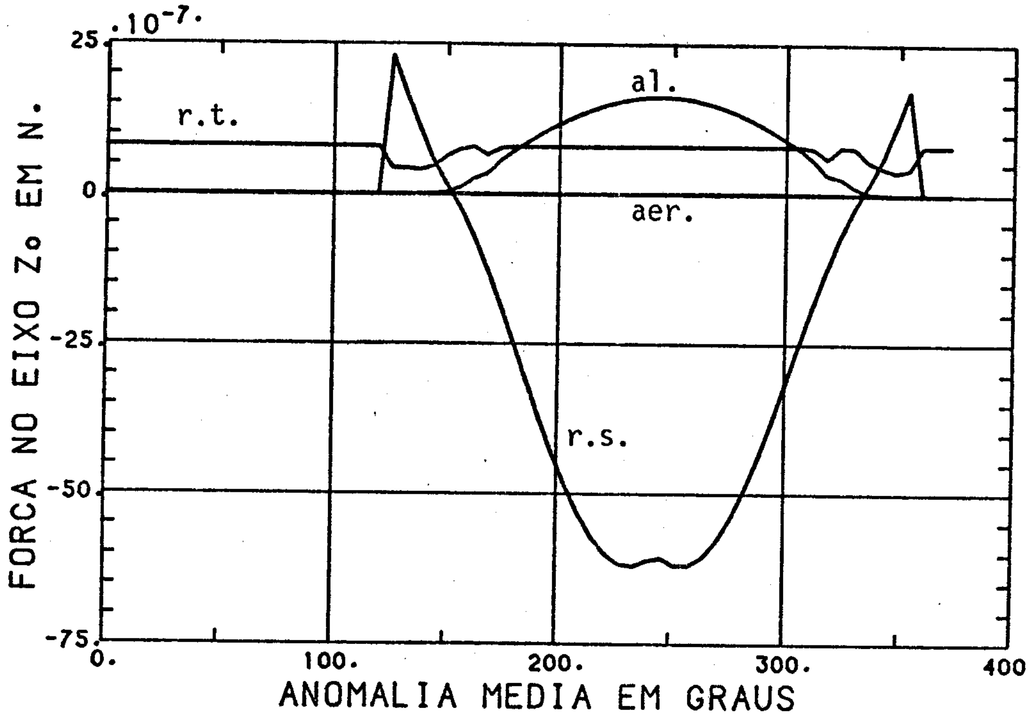

Fig. 7.47 - Forças no eixo Z^{O} (elementos orbitais: a = 7128 km, e = 0,007, i = 22^{o}, Ω = 0^{o} e ω = $14,3^{o}$).

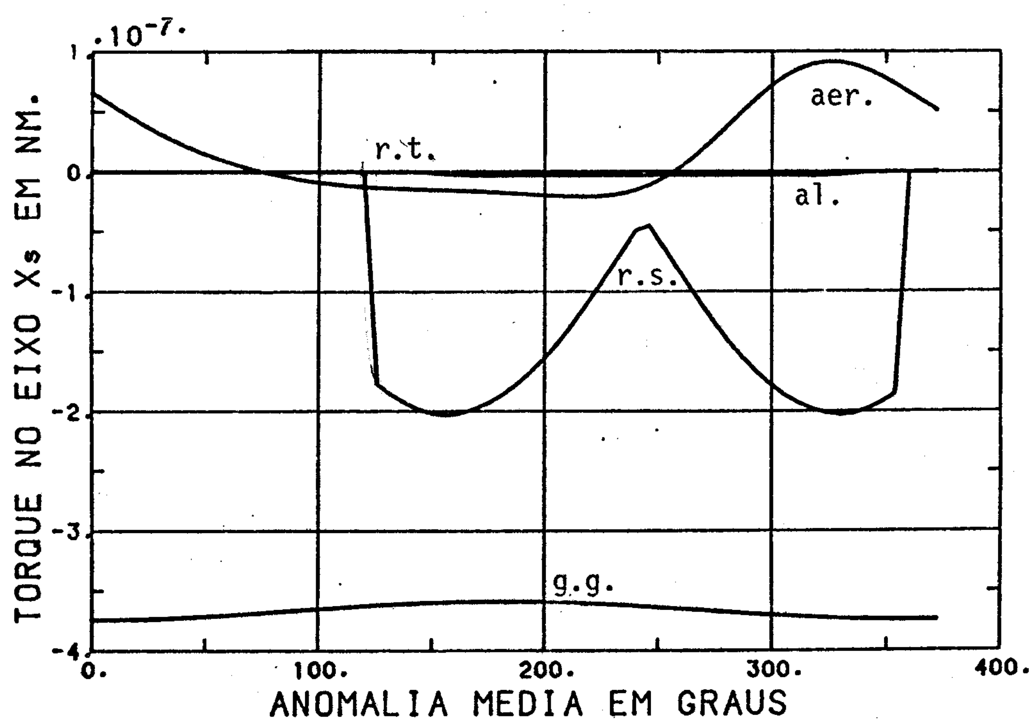

Fig. 7.48 - Torques em Nm no eixo X^{S} do sistema do satélite (orientação com relação ao sistema orbital: $\phi_S = \theta_S = \psi_S = 0$).

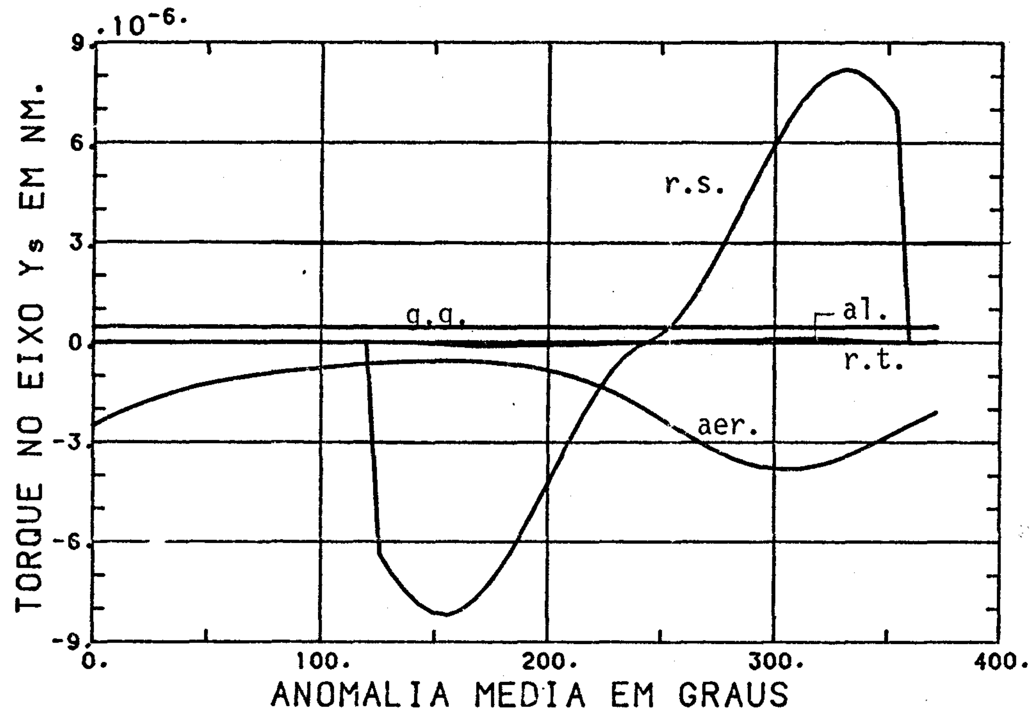

Fig. 7.49 - Torques em Nm no eixo Y^S do sistema do satélite (orientação com relação ao sistema orbital: $\phi_S = \theta_S = \psi_S = 0$).

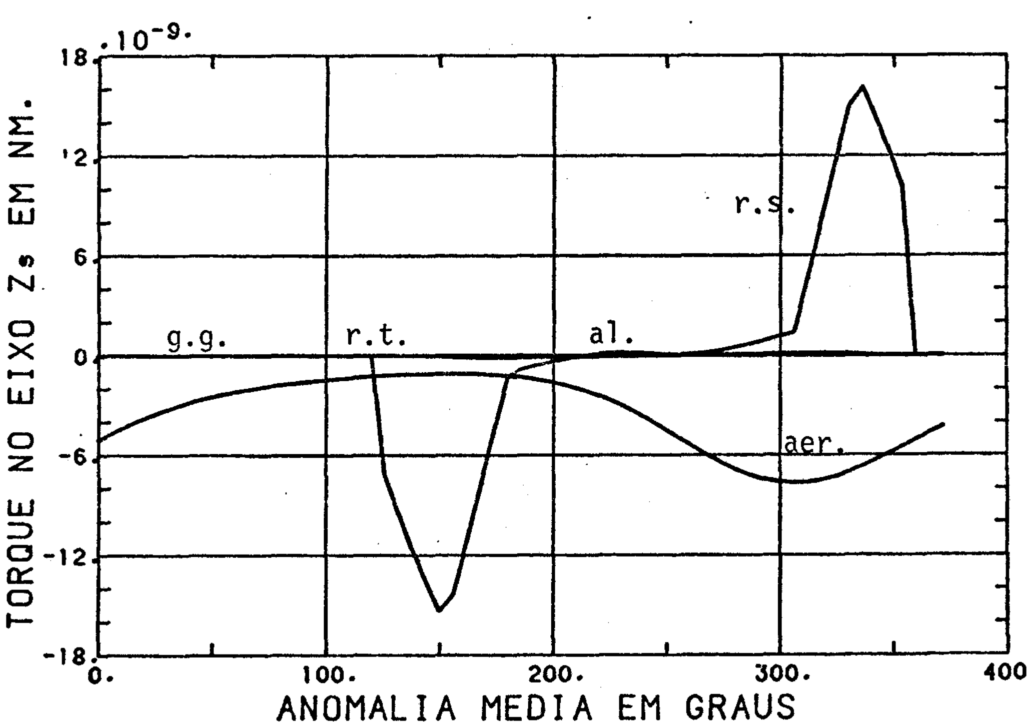

Fig. 7.50 - Torques em Nm no eixo Z^S (orientação do satélite com relação ao sistema orbital dada por: $\phi_S = \theta_S = \psi_S = 0$).

Adotando-se agora a segunda configuração com $\Omega = 180^o$, foram traçadas as Figuras 7.51 a 7.53 das forças e as Figuras 7.54 a 7.56 dos torques. Observa-se que as componentes da força de radiação solar possuem a mesma magnitude nos três eixos do sistema orbital; no eixo X^o a força aerodinâmica continua predominante. Nos demais eixos, entretanto, a radiação direta domina, e só se observa a presença do albedo e da radiação terrestre no eixo Z^o (Figura 7.53). Os torques nesta segunda configuração, seguindo a analogia das forças, são sempre menores que o torque de radiação. Entretanto não deve ser esquecido que, segundo proposto, o satélite encontra-se estabilizado, o que resulta em um torque quase nulo do gradiente de gravidade. Apenas no torque do eixo Y^s, da Figura 7.55, nota-se a influência do aerodinâmico, que procura desalinhar o mastro com relação à vertical, já que é sempre negativo em Y^s.

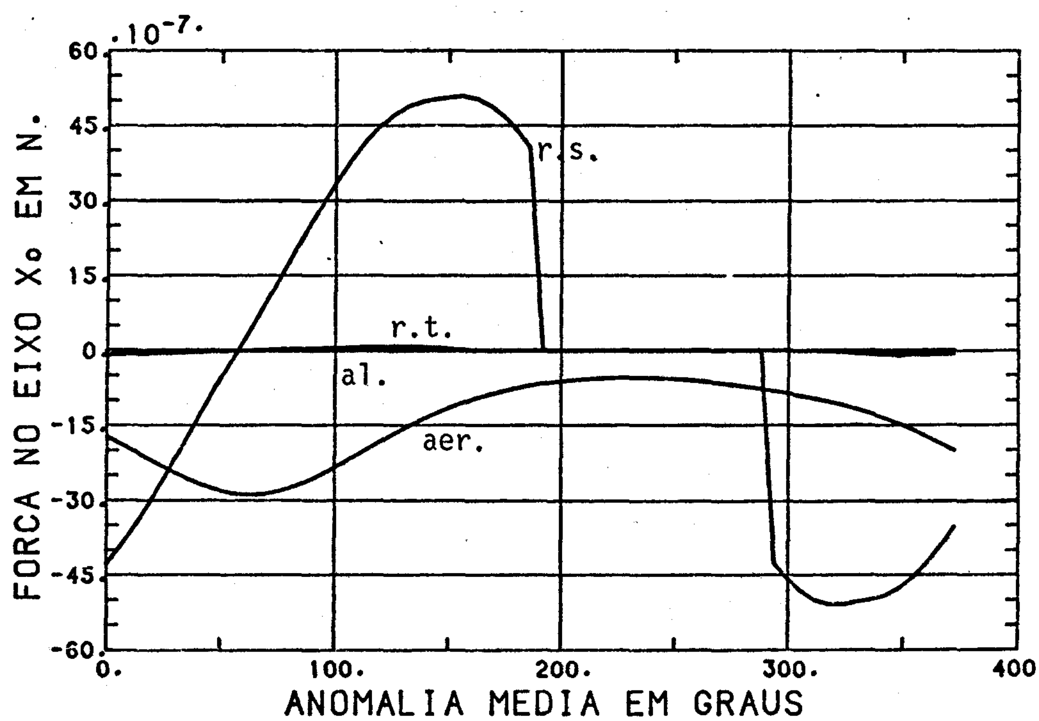

Fig. 7.51 - Forças em N no eixo X^o (elementos orbitais: a = 7128 km, e = 0,007, i = 22°, Ω = 180° e ω = 14,3°).

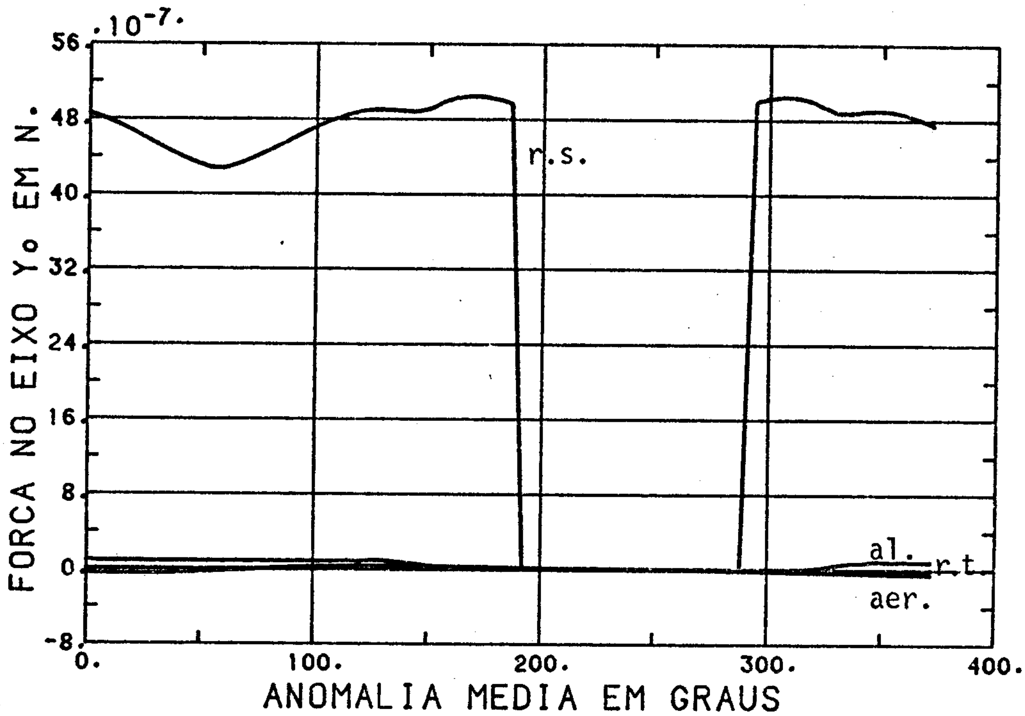

Fig. 7.52 - Forças em N no eixo Y^0 (elementos orbitais: a = 7128 km, e = 0,007, i = 22°, Ω = 180° e ω = 14,3°).

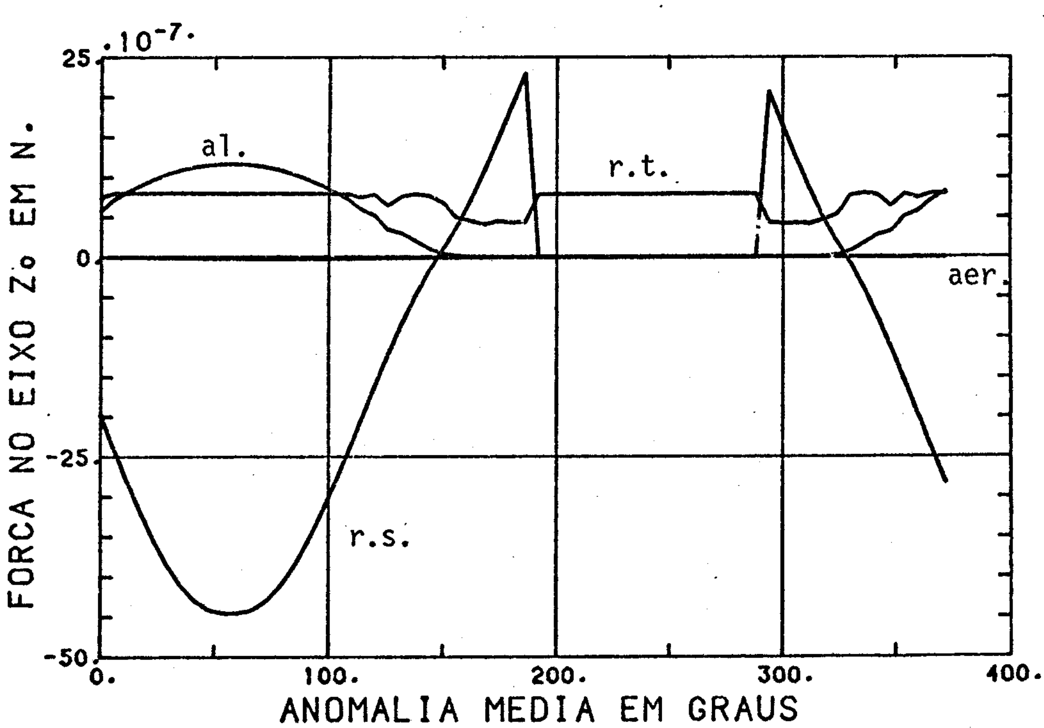

Fig. 7.53 - Forças em N no eixo Z^0 (elementos orbitais: a = 7128 km, e = 0,007, i = 22°, Ω = 180° e ω = 14,3°).

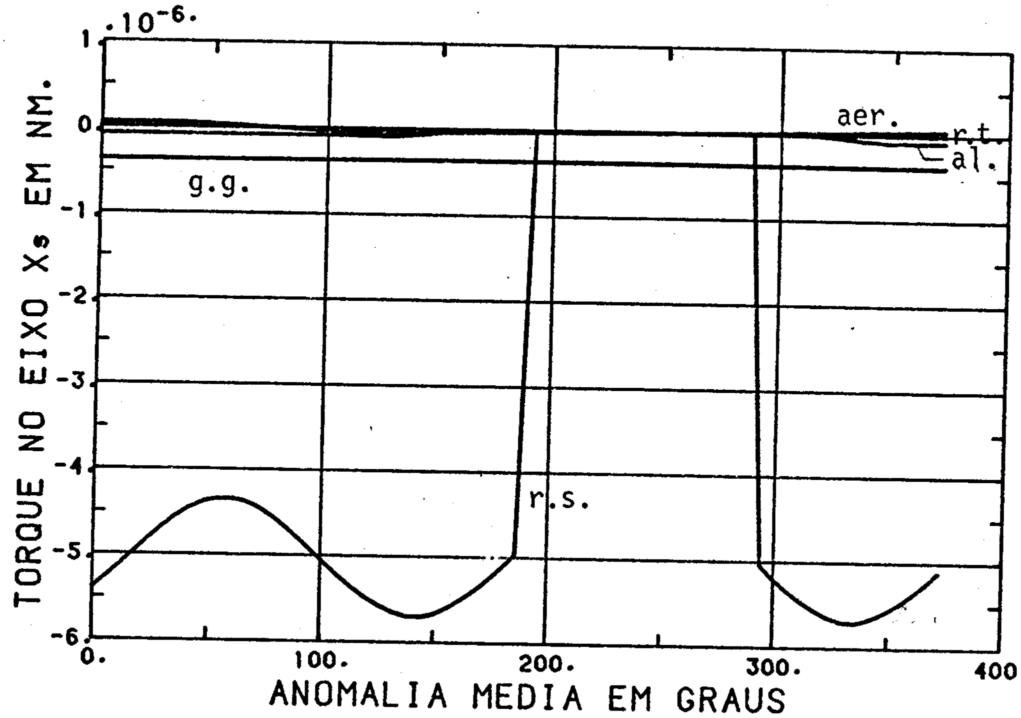

Fig. 7.54 - Torques em Nm no eixo X^S (ângulos de atitude com relação ao sistema orbital: $\phi_S = \theta_S = \psi_S = 0^o$).

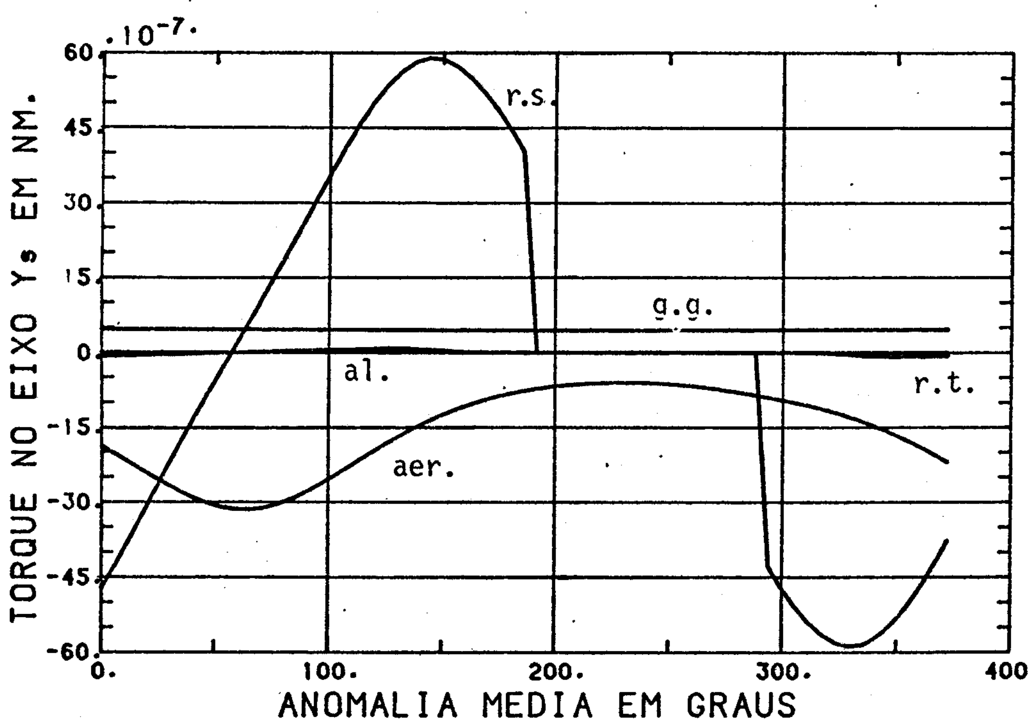

Fig. 7.55 - Torques em Nm no eixo Y^S do satélite (ângulos de atitu de com relação ao sistema orbital: $\phi_S = \theta_S = \psi_S = 0$).

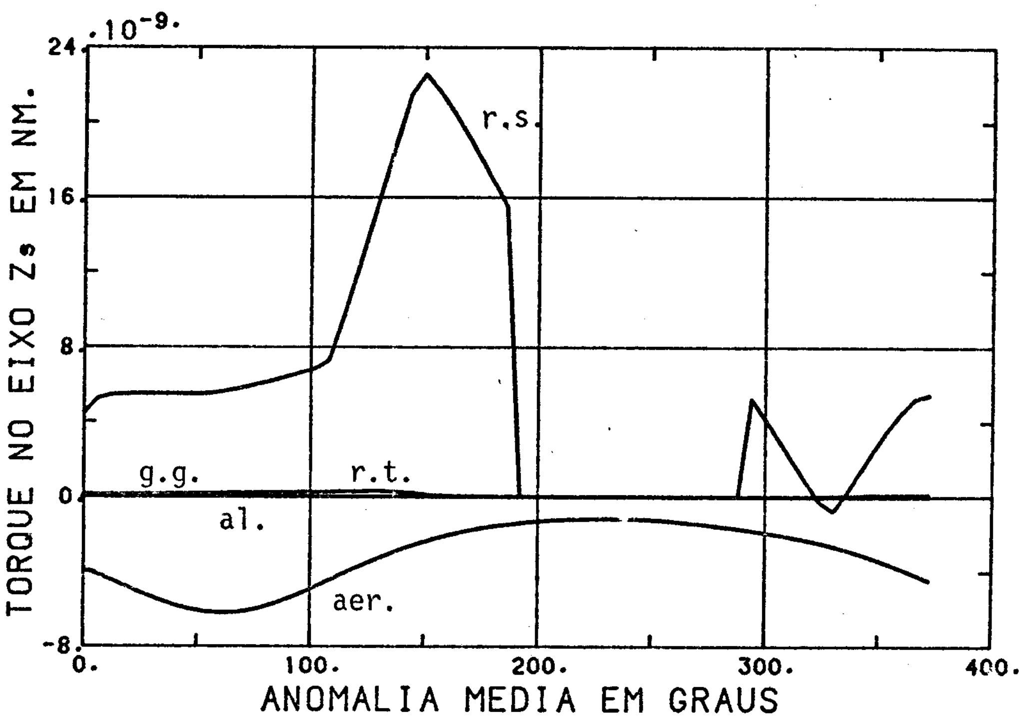

Fig. 7.56 - Torques no eixo Z^S em Nm (ângulos de atitude com relação ao sistema $X^oY^oZ^o$ $\phi_s = \theta_s = \psi_s = 0$).

Nas Figuras 7.57 a 7.60, as forças e torques nos eixos X^s e Y^s foram traçadas, alterando-se a altitude e a excentricidade que assumiram, respectivamente, os valores:

$$h = 500 \text{ km}, \tag{7.11}$$

$$e = 0{,}0 \ , \tag{7.12}$$

mantendo-se a ascensão reta no seu último valor, 180^o. Como pode ser observado na Figura 7.57, a força aerodinâmica a essa altitude torna-se 10 vezes superior à radiação solar. Entretanto o torque de gradiente de gravidade, com a orientação do satélite definida por $\phi_s = \theta_s = \psi_s = 0$, não anula o efeito dos demais torques, principalmente o aerodinâmico; portanto o satélite não se encontra em equilíbrio nesta posição. De fato, para se atingir o ponto de equilíbrio com um torque aerodinâmico médio sobre o eixo Y^o de

$$\bar{M}_A = -6 \cdot 10^{-5}\ \bar{J}^s \quad N\,m, \tag{7.13}$$

de acordo com a Figura 7.60, bastaria que o mastro formasse com a vertical um ângulo θ_s de 3^o aproximadamente, conforme a Figura 7.61. Esse mesmo procedimento, quando feito à altitude de 750 km, resulta num ângulo de alguns minutos, inferior ao ângulo formado pelo eixo Z^s e pelo eixo associado ao menor momento de inércia do satélite, e que vale $1{,}8^o$ aproximadamente.

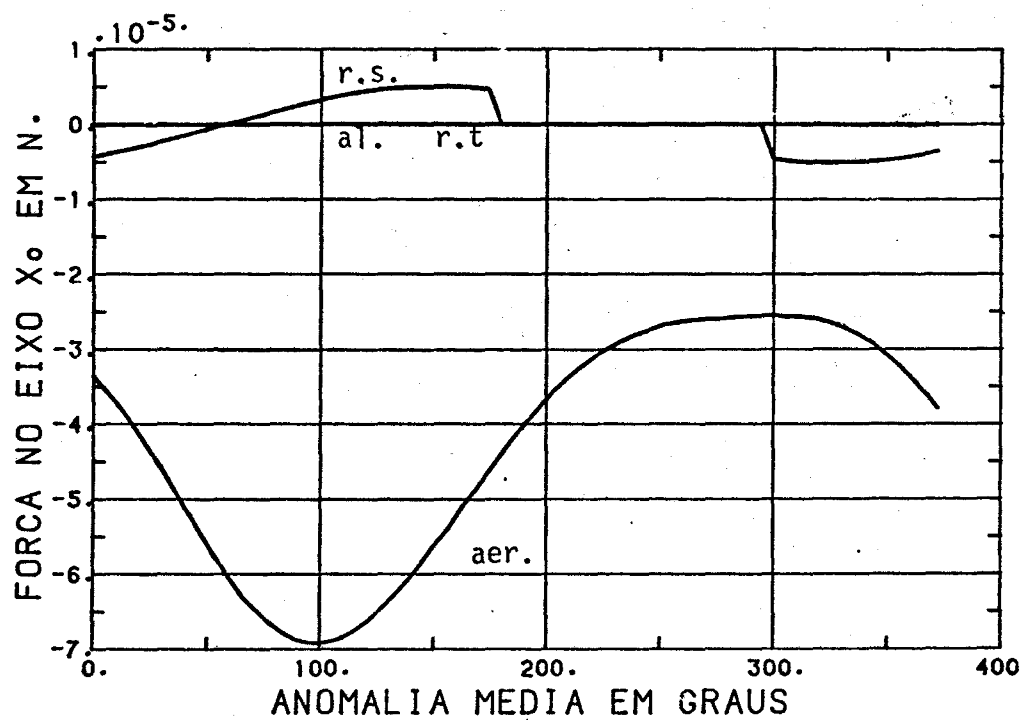

Fig. 7.57 - Forças no eixo X^o em N (elementos orbitais: a = 6878 km, e = 0, i = 22^o, ω = $14{,}3^o$, Ω = 180^o e h = 500 km).

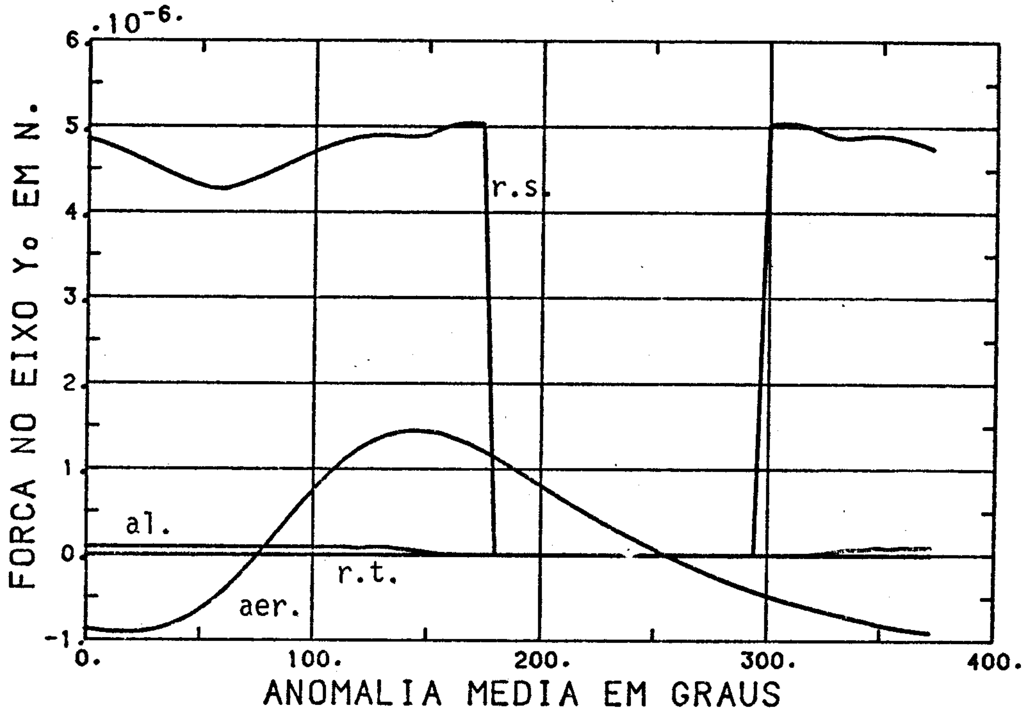

Fig. 7.58 - Forças em N no eixo Y^o (elementos orbitais: a = 6878 km (500 km de altitude), e = 0, i = 22^o, $\Omega = 180^o$, $\omega = 14{,}3^o$).

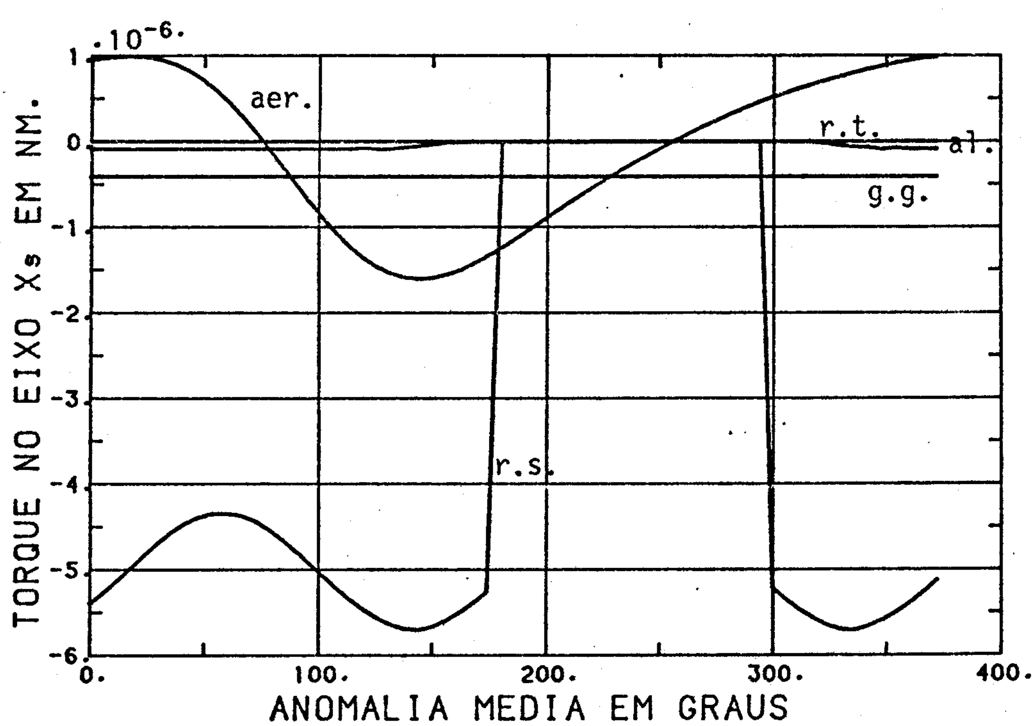

Fig. 7.59 - Torques em Nm no eixo X^S do sistema do satélite (ângulos de atitude com relação a $X^oY^oZ^o$: $\phi_S = \theta_S = \psi_S = 0$).

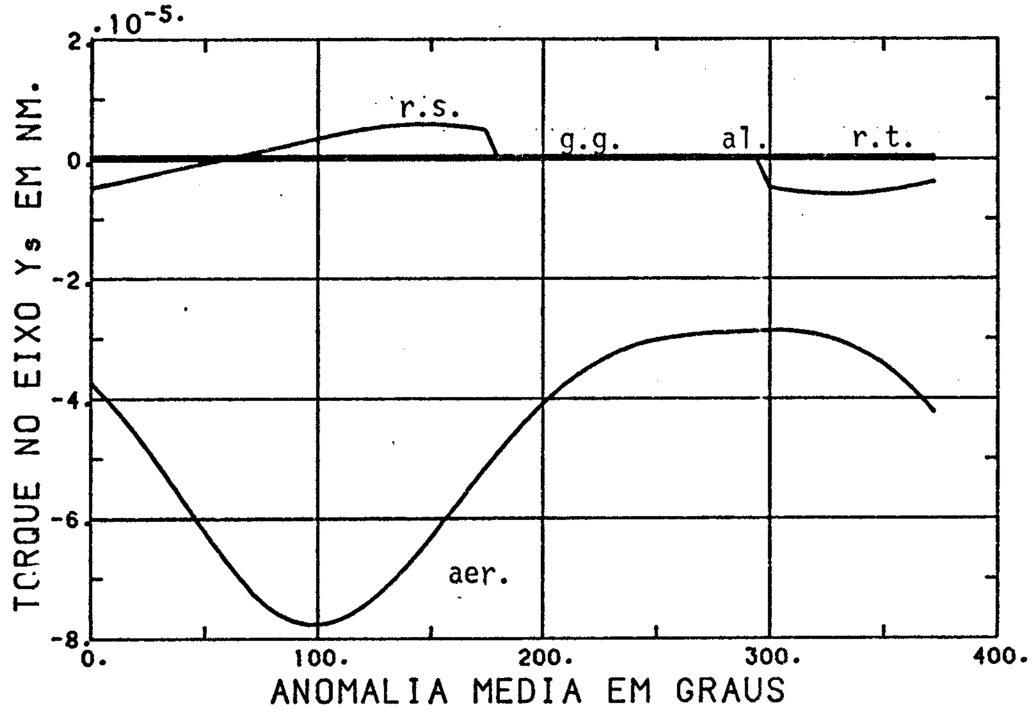

Fig. 7.60 - Torques em Nm no eixo Y^S (ângulos de atitude com relação ao sistema $X^O Y^O Z^O$ $\phi_s = \theta_s = \psi_s = 0$ e h = 500 km).

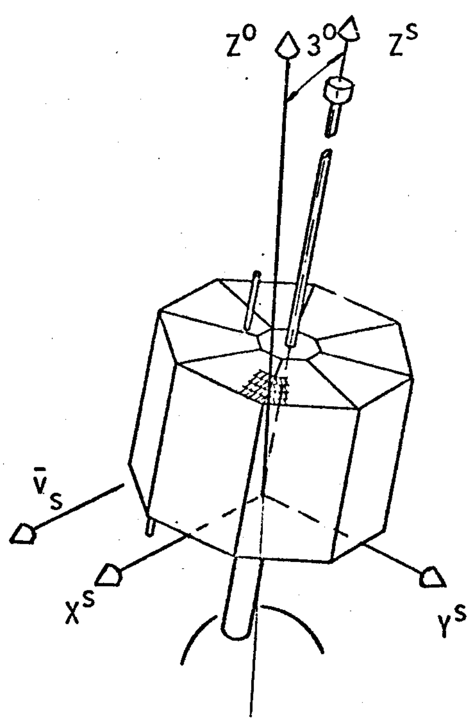

Fig. 7.61 - Ponto de equilíbrio entre os torques aerodinâmicos e de gradiente de gravidade, a 500 km de altitude.

CAPÍTULO 8

COMENTÁRIOS E CONCLUSÕES

As modelagens das forças e torques aerodinâmicos, de radiação, devidos albedo, à radiação terrestre e do torque de gradiente de gravidade aqui formuladas foram desenvolvidos computacionalmente. O programa gerado mostrou-se bastante preciso, a despeito do imperfeito conhecimento das características superficiais dos satélites e da dificuldade de implantar a descrição de sua geometria em termos computacionais. Outras teorias, embora em certos casos garantam maior precisão, aumentam sobremaneira o grau de complexidade, além de introduzirem coeficientes difíceis de serem obtidos experimentalmente.

No entanto, os modelos empregados aqui dependem intrinsecamente da temperatura superficial do satélite e, portanto, de um prévio balanço térmico onde normalmente são feitas grandes aproximações, em virtude da dificuldade de obter a distribuição de temperatura em função das inúmeras variáveis envolvidas. A variação desta distribuição ao longo da estrutura do satélite pode provocar razoáveis alterações nas forças de radiação, pequenas alterações nas forças aerodinâmicas, alterações quase nulas nas forças eletromagnéticas e nenhum efeito no torque de gradiente de gravidade. Outra dificuldade está em obter valores realísticos para os coeficientes de acomodação aerodinâmicos, σ e σ', e para os coeficientes de reflexão de radiação, γ e ρ. Nos poucos artigos onde estes coeficientes foram numericamente determinados, não se encontram resultados aplicáveis diretamente às superfícies comumente utilizadas nos satélite, como, por exemplo, células solares.

De qualquer forma, o fato de determinar as forças a partir da geometria do satélite, melhora sensivelmente resultados calculados com base em coeficientes considerados constantes, quando na realidade não o são. Mesmo para um cálculo preliminar sem muita precisão, o procedimento com coeficiente constante só será válido quando o satélite for altamente simétrico (uma esfera, por exemplo), ou possuir atitu de perfeitamente definida ao longo da órbita. Em se tratando dos torques, estes são altamente influenciados pela orientação do satélite, variando rapidamente durante a fase de aquisição da atitude após o lançamento. Por isso, sua obtenção por meio de coeficientes será válida apenas numa primeira aproximação, quando os resultados não necessitarem de grande precisão.

No caso do satélite utilizado na determinação das forças e torques, verificou-se que as forças de radiação e aerodinâmica apresentam uma variação cíclica com período de 45^o no ângulo ψ_s (Figura 7.43), devido ao formato octagonal do satélite. Este ângulo pode entretanto variar durante a órbita, devido ao movimento residual de rotação do satélite em torno do eixo Z^s (Figura 7.1). Obviamente esta rotação deve ser suficientemente pequena para não impedir a captura do satélite pelo torque de gradiente de gravidade. No cálculo das perturbações orbitais, a adoção de um valor médio para as forças durante um período de 45^o em ψ_s fornece um resultado coerente na ausência de dados a respeito do movimento em torno de Z^s. Os torques, no entanto, por serem provocados essencialmente pelo mastro cilíndrico (15 da Figura 7.1), praticamente não apresentam essa variação periódica. O mastro também contribui adicionando um significativo arrasto aerodinâmico ao satélite, devido ao seu grande comprimento. Provoca também um torque predominantemente perpendicular ao eixo Z^s, que tende a desalinhá-lo da vertical. Na ausência de outros torques, o torque aerodinâmico será equilibrado pelo torque de gradiente de gravidade, de forma que a 700 km de altitude e órbita circular, o eixo Z^s do satélite forme com a vertical local um ângulo de $0,2^o$, aproximadamente.

De uma maneira geral pode-se dizer que, embora dependentes das características e do formato, as forças aerodinâmicas para a maioria dos satélites se mantêm significativas até os 1000 km, ao passo que os efeitos da radiação começam a ser sentidos a partir dos 400 km. Em satélites simétricos, onde os torques aerodinâmicos e de radiação são pequenos, uma verificação da ordem de grandeza dos torques eletromagnéticos também se faz necessária. O albedo e a radiação terrestre serão determinados quando houver necessidade de maior precisão nas forças de radiação e, como estas, devem ser analisadas a partir dos 400 km. Uma investigação prévia dos momentos de inércia do satélite fornecerá a ordem de grandeza do torque de gradiente de gravidade, indicando ser ou não necessária a sua inclusão. Reforça-se novamente que o que foi dito é válido para satélites típicos, e naqueles que não se ajustarem a um valor médio deverá ser feita uma análise detalhada de cada tipo de força e torque.

Finalmente sugere-se como continuidade o desenvolvimento de um programa computacional capaz de estimar, pelo menos aproximadamente, a temperatura dos elementos da superfície externa do satélite, o que ajudaria a aumentar a precisão dos cálculos. Sob o mesmo ponto de vista, a determinação experimental dos limites variacionais dos coeficientes de reflexão e acomodação viria a reduzir os casos a seren analisados, além de aumentar a confiabilidade dos resultados. Também sugere-se a inclusão do efeito do achatamento terrestre na determinação do torque de gradiente de gravidade, para obter maior precisão nesse torque, principalmente em satélites estabilizados passivamente, como o analisado no presente trabalho.

<u>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS</u>

ABADIE, L. *Controle et stabilisations des vehicles spatiaux.* Paris, ESRO. 1968. v. 2. (ESRO SP-17).

ANUÁRIO ASTRONÔMICO, São Paulo, 1974- . Continuação do ANUÁRIO DO OBSERVATÓRIO DE SÃO PAULO, São Paulo, 1930-1973.

BANNISTER, T.C. *Radiation geometry factor between the Earth and a satellite.* Washington, DC, NASA, 1965. (NASA TN D-2750).

BEARD, D.B.; JOHNSON, F.S. Charge and magnetic field interaction with satellites. *Journal of Geophysical Research*, <u>65</u>(1):1-7, Jan. 1960.

BELETSKII, V.V. Analysis of torques on a satellite. In: *Motion of an artificial satellite about its center of mass.* Jerusalem, IPST, 1966. cap. 1, p. 1-26. (Series Mechanics of Space Flight).

BOETTCHER, R.-D. *The calculation of convex body aerodynamics in free molecular flow using a plane element surface approximation - Survey on theory and methods - Description of a FORTRAN program package;* final report - part 1. Götingen, Germany, DFVLR, 1979. (DFVLR-IB 251-79 A 13).

BOETTCHER, R.-D.; LEGGE, H. Determination of aerodynamic forces on satellites by theory and wind tunnel experiments. *Acta Astronautica* <u>7</u>(3):255-267, Mar. 1980.

BROUWER, D.; CLEMENCE, G.M. *Methods of celestial mechanics.* New York, NY, Academic, 1961.

BRUNDIN, C.L. Effects of charged particles on the motion of an Earth satellite. *AIAA Journal*, <u>1</u>(11):2529-2538, Nov. 1963.

CHAHINE, M.T. Free-molecule flow over nonconvex surfaces. In: INTERNATIONAL SYMPOSIUM ON RAREFIED GAS DYNAMICS, 2., Berkely, CA, 1960. *Proceedings.* New York, Academic, 1961, Section 2, p. 209--230. (Advanced in Aplied Mechanics).

CHANG, H.H.C.; SMITH, M.C. On the drag of a spherical satellite moving in a partially ionized atmosphere. *Journal of the British Interplanetary Society*, <u>17</u>(11):199-205, Jan./Feb. 1960.

CHAPMAN, S.; COWLING, T.G. *The mathematical theory of non-uniform gases.* 3.ed. Cambridge, Great Britain, Cambridge University Press, 1970.

CHU, C.K.; GROSS, R.A. Alfvēn waves and induction drag on long cylindrical satellites. *AIAA Journal,* 4(12):2209-2214, Dec. 1966.

CLARK, L.G.; ANDERSON, E.C. *Geometric shape factors for planetary-thermal and planetary-reflected radiation incident upon spenning and nonspinning spacecraft.* Washington, DC, NASA, 1965. (NASA TN D-1835).

COMMITTEE ON SPACE RESEARCH (COSPAR). *CIRA 1972.* Berlim, Akademic-Verlag, 1972.

CRANDALL, S.H.; KARNOPP, D.C.; KURTZ Jr., E.F.; PRIDMORE-BROWN, D.C. Dynamical properties of a rigid body. In: CRANDALL, S.H. ed. *Dynamics of mechanical and eletromechanical systems.* New York, NY, McGraw-Hill, c1968, cap. 3., p. 165-207.

CUNNINGHAM, F.G. *Earth reflected solar radiation incident upon an arbitrarily oriented spinning flat plate.* Washington, DC, NASA, 1963a. (NASA TN D-1842).

——— *Earth reflected solar radiation input to spherical satellites.* Washington, DC, NASA, 1961. (NASA TN D-1099).

——— *Power input to a small flat from a diffusely radiating sphere with application to EArth satellites: the spinning plate.* Washington, DC, NASA, 1963b. (NASA TN D-1545).

DEUTSCH, R. *Orbital dynamics of space vehicles.* Englewood Cliffs, NJ, Prentice-Hall, 1963.

DOUGHT, R.O.; SCHAETZLE, W.J. Experimental determination of momentum accomodation coefficients at velocities up to and exceeding Earth escape velocity. In: INTERNATIONAL SYMPOSIUM ON RAREFIELD GAS DYNAMICS 6. Cambridge, MA, 1968. *Proceedings.* New York, N.Y., Academic, 1969, v.2, p. 1035-1054. (Advanced in Applied Mechanics, Supplement 5).

ESCOBAL, P.R. *Methods of orbit determination.* New York, NY, John Wiley, 1965.

EVANS, W.J. Aerodynamic and radiation disturbance torques on satellites having complex geometry. In: SINGER, S.F., ed. *Torques and attitude sensing in Earth satellites.* New York, Academic, 1964, cap. 5, p. 83-98. (Applied Mathematics and Mechanics, 7).

FLANDERN, T.C. Van; PULKKINEN, K.F. Low-precision formulae for planetary positions. *The Astrophysical Journal Supplement Series*, 41(3):319-411, Nov. 1979.

FREDO, R.M.; KAPLAN, M.H. Procedure for obtaining aerodynamic properties of spacecraft. *Journal of Spacecraft*, 18(4):367-373, July/Aug. 1981.

GEORGEVIC, R.M. The solar radiation pressure force and torque model. *The Journal of the Astronautical Sciences*, 20(5):257-274, Mar./Apr. 1973a.

——— The solar radiation pressure in the Mariner 9 Mars Orbiter. *Astronautica Acta*, 18(2):109-115, Apr. 1973b.

GOLDSTEIN, H. *Classical Mechanics*. Reading, MA, Addison-Wesley, 1973.

HALVERSON, R.P.; COHEN, H. Torque on a spinning hollow sphere in a uniform magnetic field. *IEEE Transactions on Aerospace and Navigational Electronics*, 11(2):118-122, June 1964.

HOHL, F. *The electromagnetic torques on spherical Earth satellites in a rarefied partially ionized atmosphere.* Washington, DC, NASA, 1966. (NASA TR R-231).

HOHL, F.; WOOD, G.P. The electrostatic and eletromagnetic drag forces on a spherical satellite in a rarefied partially ionized atmosphere. In: INTERNATIONAL SYMPOSIUM ON RAREFIED GAS DYNAMICS, 3. Paris, 1962. *Proceedings*. New York, NY, Academic, 1963, Vol. 2, p. 45-64. (Advanced in Applied Mechanics, Supplement 2).

INTERNATIONAL SYMPOSIUM ON RAREFIED GAS DYNAMICS, 6., Cambridge, MA, 1968. *Proceedings*. New York, NY, Academic, 1969, 2.v. (Advanced in Applied Mechanics, Supplement 5).

INTERNATIONAL SYMPOSIUM ON RAREFIED GAS DYNAMICS, 7., Pisa, 1970. *Proceedings*. Pisa, Technico Scientifica, 1971, 2 v.

———, 8., Stanford, 1971. *Proceedings*. New York, NY, Academic, 1974.

———, 9., Göttingen, Germany, 1974. *Proceedings*. Porz-Wahn, DFVLR, 1974.

———, 10., Aspen, CO, 1976. New York, NY, American Institute of Aeronautics and Astronuatics, 1977, partes 1/2. (Progress in Aeronaurics and Astronautics, 51).

JACCHIA, L.G. Atmospheric models in the region from 110 to 2000 km. In: COMMITTEE ON SPACE RESEARCH (COSPAR). *CIRA 1972*. Berlim, Akademic-Verlag, 1972. Part 3, p. 227-338.

——— *Revised static models of the thermosphere and exosphere with empirical temperatures profiles*. Cambridge, MA, SAO, 1971. (SAO Special Report nº 332).

——— *Thermospheric temperature, density and composition: new models*. Cambridge, MA, SAO, 1977. (SAO Special Report 375).

JASTROW, R.; PEARSE; C.A. Atmospheric drag on the satellite. *Journal of Geophysical Research*, 62(3):413-423, Sept. 1957.

KIEL, R.E.; GEY, F.C.; GUSTAFSON, W.A. Electrostatis potential fields of an ionospheric satellite. *AIAA Journal*, 6(4):690-694, Apr. 1968.

KING-HELE, D. *Theory of satellite orbits in an atmosphere*. London, Butterworths, 1964.

KNECHTEL, E.D.; PITTS, W.C. Experimental momentum accomodation on metal surfaces of ions near and above Earth-satellite speeds. In: INTERNATIONAL SYMPOSIUM ON RAREFIED GAS DYNAMICS, 6., Cambridge, MA, 1968. *Proceedings*. New York, NY, Academic, 1969. v. 2, p. 1035-1054. (Advanced in Applied Mechanics, Supp. 5).

——— Normal and tangencial momentum accomodation for Earth satellite conditions. *Astronautica Acta*. 18(3):171-184, June 1973.

KREITH, F. *Principles of heat transfer.* New York, NY, Intext Educational Publishers, 1973.

——— *Radiation heat transfer for spacecraft and solar power plant design.* Scranton, International Textbook, 1962.

LEE, J.F.; SEARS, F.W.; TURCOTTE, D.L. *Statistical thermodynamics.* Reading, MA, Addison-Weley, 1963. (Addison-Wesley Series in Mechanics and Thermodynamics).

MEDEIROS, V.M.; KUGA, H.K. *Algoritmo de baixa precisão para determinação da posição dos dez corpos mais importantes do sistema solar.* São José dos Campos, SP, INPE, dez. 1980. (INPE-1954-RPE/168).

MEIROVITCH, L. Problems in celestial mechanics, In: ——— *Methods of analytical dynamics.* New York, NY, McGraw-Hill, c1970. cap. 11, p. 408-451. (McGraw-Hill Series in Advanced Engineering).

MUSEN, P. The influence of the solar radiation pressure on the motion of an artificial satellite. *Journal of Geophysical Research,* 65(5): 1391-1396, May 1960.

NEGREIROS DE PAIVA, R. *Simulação numérica da densidade atmosférica.* São José dos Campos, INPE, 1979. (INPE-1436-RPI/002).

NIDEY, R.A. Gravitational torque on a satellite of arbitrary shape. *American Rocket Society,* 30(2):203-204, Feb. 1960.

OYA, H. Ionospheric plasma disturbance due to a moving space vehicle. *Planetary and Space Science,* 18(6):793-802, June 1970.

ROBERTS Jr., C.E. An analytical model for upper atmospheric densities based upon Jacchia's 1970 models. *Celestial Mehcanics,* 4(3/4):368-377, Dec. 1971.

ROBERTSON, R.E. Generalized gravity-gradient torques. In: SINGER, S. F., ed. *Torques and attitude sensing in Earth satellites.* New York, Academic, 1964. cap. 4, p. 73-82. (Applied Mathematics and Mechanics, 7).

——— Gravitational torque on a satellite vehicle. *Journal of Franklin Institute,* 265(sf):13-22, 1958.

SAMIR, U.; WRENN, G.L. The dependence of charge and potential distribution around a spacecraft on ionic composition. *Planetary and Space Science*, 17(4):693-706, Apr. 1969.

SCHAAF, S.A.; CHAMBRÉ, P.L. *Flow of rarefied gases*. Princeton, NJ, Princeton University Press, 1961. (Princeton Aeronautical Paperbacks, 8).

SMITH, G.L. *Effects of magnetically induced eddy-current torques on spin motions of an Earth satellite*. Washington, DC, NASA, 1964. (NASA TN D-2198).

SPAROW, E.M.; CESS, R.D. *Radiation heat transfer*. Washington, Hemisphere, c1978. (Series in Thermal and Fluids Engineering).

SPENCE Jr., C.B. Environmental torques. In: WERTZ, J.R. *Spacecraft attitude determination and control*. Dordrecht, Holland, D. Reidel, c1978. Section 17.2. (Astrophysics and space science library, 73).

STALDER, J.R.; GOODWIN, G.; CREAGER, M.O. *A comparison of theory and experiment for high-speed free-molecule flow*. Washington, DC, NACA, 1950. (NACA TN 2244).

STALDER, J.R.; ZURICK, V.J. *Theoretical aerodynamic characteristics of bodies in a free-molecule-flow field*. Washington, DC, NACA, 1951. (NACA TN 2423).

UNITED STATES AIR FORCE (USAF). *U. S. Standard Atmosphere 1976*. Washington, DC, 1976.

VAGLIO-LAURIN, R.; MILLER, G. Electrostatic field in the trail of ionospheric satellites. *AIAA Journal*, 8(6):1098-1103, June 1970.

VENKATARAMAN, N.S.; GUSTAFSON, W.A. Alfvén waves associated with long cylindrical satellites. *The Journal of Astronautical Sciences*, 21(2):99-117, Sep./Oct. 1973.

WOLF, M. A new look at silicon solar cell performance. *Energy conversion*, 11(2):63-73, June 1971.

$\sigma_n = \sigma'$
$\sigma_t = \sigma$

APÊNDICE A

INTEGRAÇÃO ANALÍTICA E TESTE DA INTEGRAÇÃO NUMÉRICA DO COEFICIENTE DE ARRASTO AERODINÂMICO EM CORPOS SIMPLES

A integração analítica da Equação 3.24 num cilindro resulta em:

$$C_{DAc} = \frac{\sqrt{\pi}}{s} e^{-s'} \left\{ \overset{\sigma}{I_0}(s') + \frac{\cos^2 \alpha}{2} (2 - \sigma - \sigma') \left[I_0(s') - I_1(s') \right] + \right.$$

$$+ \left[\sigma s^2 + 0,5\, (2 - \overset{\sigma'}{\cancel{\sigma}}) \right] \cos^2 \alpha \left[I_0(s') + I_1(s') \right] +$$

$$+ (2 - \sigma - \sigma') \frac{2}{3} s' \cos^2 \alpha \left[2\, I_0(s') + 2\, I_1(s') + \right.$$

$$\left. \left. + \frac{1}{2s'} \quad I_1(s') \right] \right\} + \frac{\overset{\sigma'}{\cancel{\sigma}}\, \pi \sqrt{\pi}}{4s} \cos^2 \alpha \sqrt{\frac{T_w}{T_i}} \quad , \qquad \text{(A.1)}$$

onde I_0 e I_1 são as funções de Bessel modificadas, cujo argumento no caso é

$$s' = \frac{s^2 \cos^2 \alpha}{2} \quad , \qquad \text{(A.2)}$$

e α é o ângulo de ataque ou ângulo de arfagem (Figura A.1), que fornece a direção da velocidade $\bar{u}^S$ no plano $X^S Y^S$.

A Tabela A.1 faz a comparação entre a integração numérica num cilindro e os resultados calculados utilizando a Expressão A.1, em função das variáveis envolvidas e do número de partes em que foi dividido o cilindro na integração numérica, NUDI. Note-se que com apenas 10 divisões já se tem precisão de dois algarismos, enquanto para 50 divisões a precisão é maior que 10^{-4}, resultados compatíveis com os obtidos por Boettcher and Legge (1980).

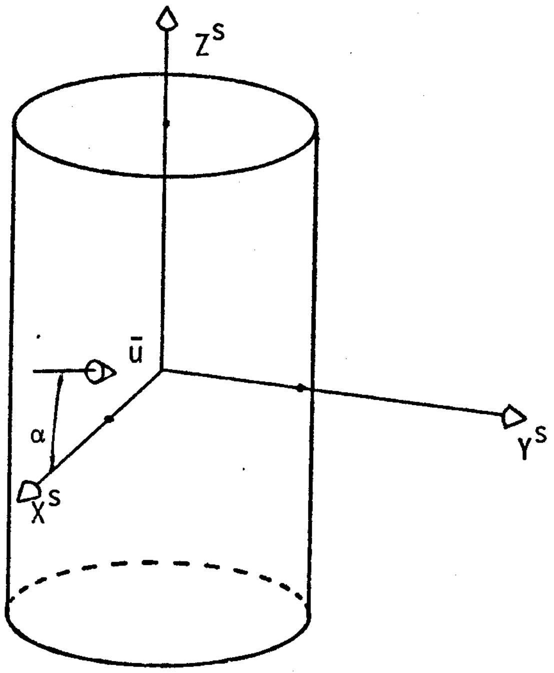

Fig. A.1 - Ângulo de ataque α num cilindro.

A Figura A.2 mostra o número de dígitos significativos no cálculo do coeficiente de arrasto num cilindro, em função do número de divisões, utilizando-se dois valores diferentes de s, e com ângulo de ataque nulo. Praticamente com 64 divisões a integração numérica já atinge a precisão do computador: 11 dígitos. Nota-se também na Tabela A.1 que a variação máxima sofrida pelo coeficiente de arrasto para ângulo α nulo é de 20%, quando a reflexão passa de difusa para especular, com T_w/T_i = 0,5 e s = 4. Quando a razão de velocidades s for igual a 10, essa variação será de 27%. Note-se também que, para este ângulo de ataque, o arrasto na reflexão especular é maior que o obtido na reflexão difusa. Este fato ocorre em corpos com formatos cilíndricos ou semelhantes. Contudo, para ângulos de ataque maiores que 20°, aproximadamente, o arrasto difuso se torna maior que o especular.

A Expressão 3.24, quando integrada analiticamente numa esfera, resulta em

$$C_{DAe} = \frac{1}{2s^3}\,(2-\sigma'+\sigma)\left\{\frac{\mathrm{erf}(s)}{2s}\,(4s^4+4s^2-1) + \frac{e^{-s^2}}{\sqrt{\pi}}\,(2s^2+1)\right\} + \frac{2}{3}\,\frac{\sigma'}{s}\,\sqrt{\pi}\,\sqrt{\frac{T_w}{T_i}}\;. \qquad \text{(A.2)}$$

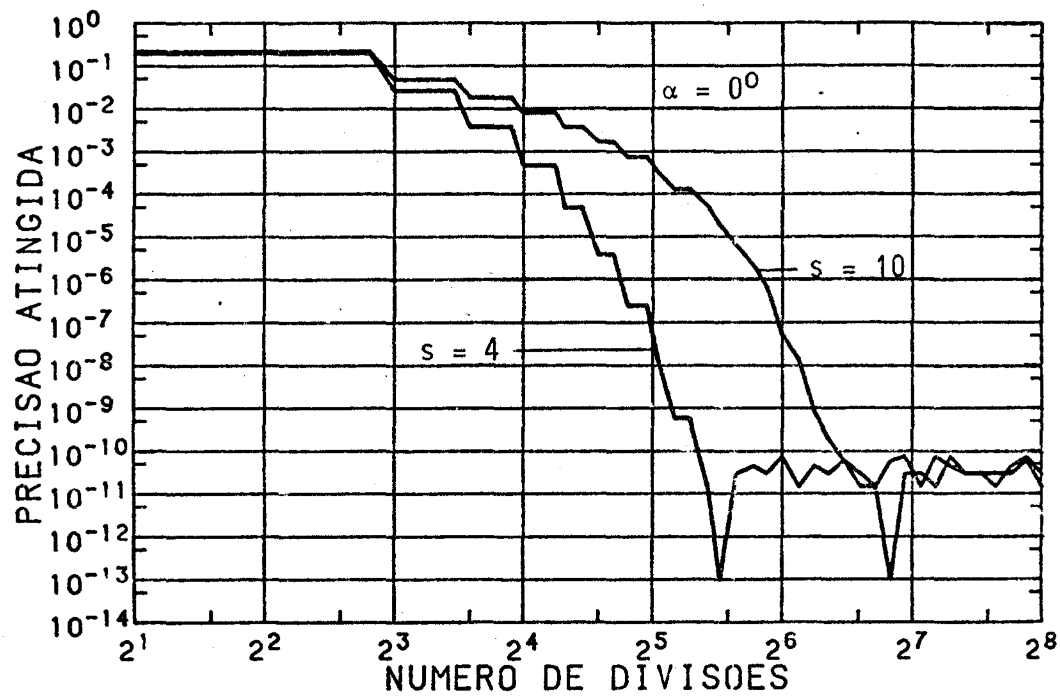

Fig. A.2 - Precisão do integrador numérico em função do número de divisões num cilindro.

A Tabela A.2 compara os resultados da integração numérica numa esfera com os da Equação A.2, onde se nota a necessidade de um número maior de divisões para se alcançar a mesma precisão obtida na integração de um cilindro. Aqui o número de divisões NUDI representa o número de partes em que foi dividido o equador da esfera (os meridianos foram divididos em NUDI/2). A Figura A.3 demonstra isso em termos do número de dígitos significativos da integração numérica e em função do número de divisões para dois valores de s: 4 e 10. Quando a reflexão passa de totalmente especular para totalmente difusa, o coeficiente de arrasto numa esfera aumenta em 14%, aproximadamente, para razão de velocidades s igual a 4. Para s = 10, essa variação diminui em 6%, ou seja, a variação tende a diminuir para grandes valores de s, fato comum nas altitudes típicas.

TABELA A.1

TESTE COMPARATIVO PARA CILINDRO

α	- Ângulo de ataque em graus.
s	- Razão de velocidades.
σ	- Coeficiente de colisão tangencial.
σ'	- Coeficiente de colisão normal.
T_w/T_i	- Razão de temperaturas.
NUDI	- Número de divisões do cilindro.
CDTE	- Coeficiente de arrasto (Integração analítica)
CDIN	- Coeficiente de arrasto (Integração numérica)

α	s	σ	σ'	T_w/T_i	NUDI	CDTE	CDIN
0,0	4,0	1,0	1,0	1,0	10	2,441	2,467
0,0	4,0	1,0	1,0	1,0	50	2,441	2,441
0,0	4,0	1,0	1,0	1,0	100	2,441	2,441
0,0	4,0	1,0	1,0	0,5	100	2,339	2,339
0,0	4,0	1,0	1,0	0,1	100	2,203	2,203
0,0	4,0	0,5	0,5	1,0	100	2,616	2,616
0,0	4,0	0,5	0,5	0,5	100	2,565	2,565
0,0	4,0	0,0	0,0	1,0	100	2,791	2,791
0,0	4,0	0,0	0,0	0,5	100	2,791	2,791
0,0	10,0	1,0	1,0	1,0	100	2,154	2,154
0,0	10,0	1,0	1,0	0,5	100	2,113	2,113
0,0	10,0	0,0	0,0	1,0	100	2,687	2,687
0,0	10,0	0,0	0,0	0,5	100	2,687	2,687
30,0	4,0	1,0	1,0	1,0	100	2,083	2,083
30,0	4,0	1,0	1,0	0,5	100	2,006	2,006
30,0	4,0	1,0	1,0	0,1	100	1,904	1,904
30,0	4,0	0,5	0,5	1,0	100	1,961	1,961
30,0	4,0	0,5	0,5	0,5	100	1,923	1,923
30,0	4,0	0,0	0,0	1,0	100	1,839	1,839
30,0	4,0	0,0	0,0	0,5	100	1,839	1,839
30,0	10,0	1,0	1,0	1,0	100	1,851	1,851
30,0	10,0	1,0	1,0	0,5	100	1,820	1,820
30,0	10,0	0,0	0,0	1,0	100	1,749	1,749
30,0	10,0	0,0	0,0	0,5	100	1,749	1,749

TABELA A.2

TESTE COMPARATIVO PARA ESFERA

s	- Razão de velocidades.
σ	- Coeficiente de colisão tangencial.
σ'	- Coeficiente de colisão normal.
T_w/T_i	- Razão de temperaturas.
NUDI	- Número de divisões da esfera.
CDTE	- Coeficiente de arrasto (Integração analítica)
CDIN	- Coeficiente de arrasto (Integração numérica)

s	σ	σ'	T_w/T_i	NUDI	CDTE	CDIN
4,0	1,0	1,0	1,0	10	2,41846	2,38744
4,0	1,0	1,0	1,0	50	2,41846	2,41712
4,0	1,0	1,0	1,0	100	2,41846	2,41815
4,0	1,0	1,0	0,5	100	2,33193	2,33164
4,0	1,0	1,0	0,1	100	2,21646	2,21619
4,0	0,5	0,5	1,0	100	2,27075	2,27042
4,0	0,5	0,5	0,5	100	2,22749	2,22717
4,0	0,5	0,5	0,1	100	2,16976	2,16944
4,0	0,0	0,0	1,0	100	2,12305	2,12270
4,0	0,0	0,0	0,5	100	2,12305	2,12270
4,0	0,0	0,0	0,1	100	2,12305	2,12270
10,0	1,0	1,0	1,0	10	2,13811	2,14883
10,0	1,0	1,0	1,0	50	2,13811	2,13674
10,0	1,0	1,0	1,0	100	2,13811	2,13780
10,0	1,0	1,0	0,5	100	2,10350	2,10319
10,0	1,0	1,0	0,1	100	2,05732	2,05701
10,0	0,5	0,5	1,0	100	2,07903	2,07871
10,0	0,5	0,5	0,5	100	2,06173	2,06141
10,0	0,5	0,5	0,1	100	2,03863	2,03832
10,0	0,0	0,0	1,0	100	2,01995	2,01962
10,0	0,0	0,0	0,5	100	2,01995	2,01962
10,0	0,0	0,0	0,1	100	2,01995	2,01962

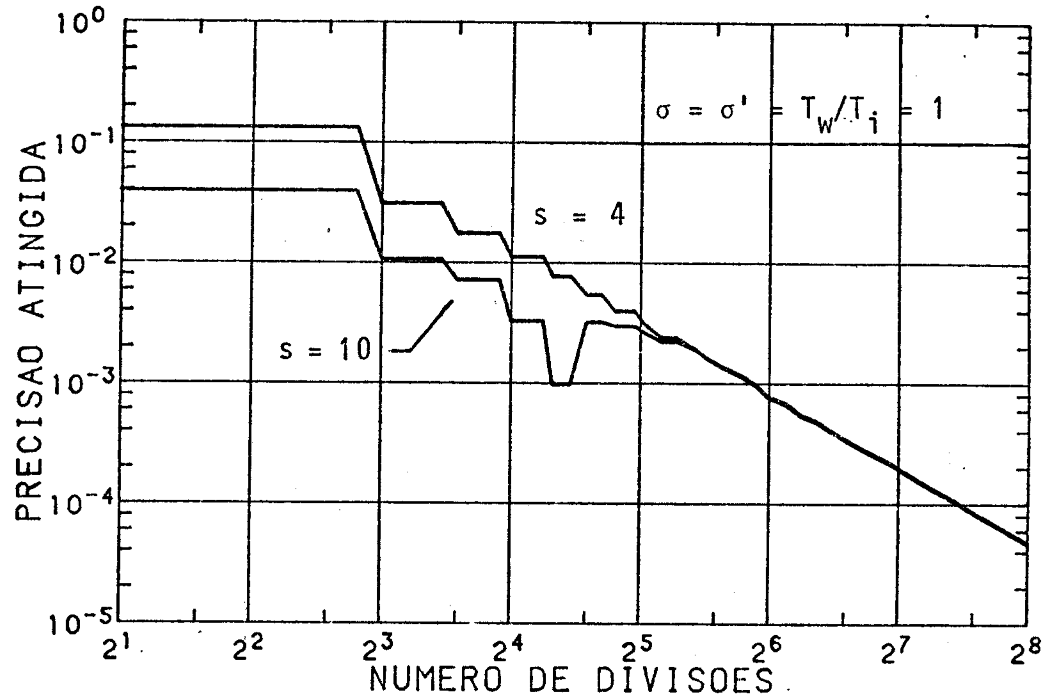

Fig. A.3 - Precisão da integração do coeficiente de arrasto numa esfera, em função do número de divisões.

APÊNDICE B

INTEGRAÇÃO ANALÍTICA E TESTE DA INTEGRAÇÃO NUMÉRICA DO COEFICIENTE DE FORÇA DE RADIAÇÃO EM CORPOS SIMPLES

Integrando-se analiticamente a Equação 4.28 num cilindro cujas paredes são adiabáticas, isto é, fazendo-se o coeficiente ν da Relação 4.20 unitário, resulta em:

$\left[\frac{\pi}{6}\cos\alpha + 1\right](1-\gamma\rho)\cos\alpha + \frac{4}{3}\gamma\rho\cos^3\alpha$

$$C_{RSc} = \left[\frac{\pi}{6}\cancel{(1-\gamma\rho)} + \frac{2}{3}\cos\alpha\,(1+\gamma\rho)\right]\cos^2\alpha + \frac{1}{2}(1-\gamma\rho)\left\{\cos\alpha + \text{sen}^2\,\alpha \ln\left[\frac{\cancel{1+\cos\alpha}}{1-\cos\alpha}\right]\right\}, \tag{B.1}$$

onde α é o ângulo formado pela direção de incidência da radiação e por um plano perpendicular ao eixo do cilindro, análogo ao definido na Figura A.1.

A mesma Equação 4.28, quando integrada numa esfera nas mesmas condições, fornece

$$C_{RSe} = \frac{1}{9}(13 - 4\gamma\rho). \tag{B.2}$$

As Tabelas B.1 e B.2 comparam, respectivamente, os resultados obtidos através das Equações B.1 e B.2 com a integração numérica num cilindro e numa esfera, em função do ângulo de ataque α, dos coeficientes γ e ρ e do número de divisões, NUDI. Note-se que a integração numérica atinge a precisão de 5 algarismos significativos quando se dividem ambos, cilindro e esfera, em 200 partes, número superior àquele usado nos coeficientes aerodinâmicos para se obter a mesma precisão. Já que mesmo com esse número de divisões a integração numérica é bastante rápida, dividindo-se tanto o cilindro quanto a esfera entre 100 e 200 partes, alia-se um ótimo resultado numérico em termos de precisão a um rápido procedimento numérico, quando se necessitar das forças num satélite que possua uma dessas duas formas como componente.

TABELA B.1

TESTE COMPARATIVO PARA CILINDRO

α - Ângulo de ataque em graus.
γ - Parcela refletida da radiação incidente.
ρ - Parcela especular da radiação refletida.
NUDI - Número de divisões do cilindro.
CDTE - Coeficiente de radiação (Integração analítica)
CDIN - Coeficiente de radiação (Integração numérica)

α	γ	ρ	NUDI	CDTE	CDIN
0,0	0,0	0,0	10	1,52360	1,54977
0,0	0,0	0,0	50	1,52360	1,52431
0,0	0,0	0,0	100	1,52360	1,52376
0,0	0,0	0,0	200	1,52360	1,52364
0,0	0,0	0,5	100	1,52360	1,52376
0,0	0,0	1,0	100	1,52360	1,52376
0,0	0,5	0,0	100	1,52360	1,52376
0,0	0,5	0,5	100	1,47603	1,47616
0,0	0,5	1,0	100	1,42847	1,42855
0,0	1,0	0,0	100	1,52360	1,52376
0,0	1,0	0,5	100	1,42847	1,42855
0,0	1,0	1,0	100	1,33333	1,33333
30,0	0,0	0,0	10	1,25872	1,28139
30,0	0,0	0,0	50	1,25872	1,25934
30,0	0,0	0,0	100	1,25872	1,25887
30,0	0,0	0,0	200	1,25872	1,25876
30,0	0,0	0,5	100	1,25872	1,25887
30,0	0,0	1,0	100	1,25872	1,25887
30,0	0,5	0,0	100	1,25872	1,25887
30,0	0,5	0,5	100	1,16055	1,16066
30,0	0,5	1,0	100	1,06237	1,06245
30,0	1,0	0,0	100	1,25872	1,25887
30,0	1,0	0,5	100	1,06237	1,06245
30,0	1,0	1,0	100	0,866025	0,866025

TABELA B.2

TESTE COMPARATIVO PARA ESFERA

γ - Parcela refletida da radiação incidente.
ρ - Parcela especular da radiação refletida.
NUDI - Número de divisões da esfera.
CDTE - Coeficiente de radiação (Integração analítica)
CDIN - Coeficiente de radiação (Integração numérica)

γ	ρ	NUDI	CDTE	CDIN
0,00	0,00	10	1,44444	1,44303
0,00	0,00	50	1,44444	1,44473
0,00	0,00	100	1,44444	1,44452
0,00	0,00	200	1,44444	1,44447
0,00	0,25	100	1,44444	1,44452
0,00	0,50	100	1,44444	1,44452
0,00	0,75	100	1,44444	1,44452
0,00	1,00	100	1,44444	1,44452
0,25	0,25	100	1,41667	1,41673
0,25	0,50	100	1,38889	1,38894
0,25	0,75	100	1,36111	1,36114
0,25	1,00	100	1,33333	1,33335
1,00	1,00	100	1,00000	0,999835
0,50	0,25	100	1,38889	1,38894
0,50	0,50	100	1,33333	1,33335
0,50	0,75	100	1,27778	1,27776
0,50	1,00	100	1,22222	1,22218
0,75	0,25	100	1,36111	1,36114
0,75	0,50	100	1,27778	1,27776
0,75	0,75	100	1,19444	1,19439
0,75	1,00	100	1,11111	1,11101
1,00	0,25	100	1,33333	1,33335
1,00	0,50	100	1,22222	1,22218
1,00	0,75	100	1,11111	1,11101

O coeficiente de força de radiação num cilindro irá aumentar em aproximadamente 14% ao se alterar a reflexão especular (γ = = 1, ρ = 1), de modo a torná-la difusa (γ = 1, ρ = 0) quando α = 0. Para α = 30^o esta variação é aumentada em 45%, pois o coeficiente de força especular diminui consideravelmente. Para uma esfera, ao se passar á reflexão de especular para difusa o coeficiente de força de radiação aumenta em 44% (Tabela B.2).

Errata

Página	Local	Onde está	Corrigir para
Rosto	Resumo	... perturbadas ...	... perturbadoras ...
18	Eq. 3.5	$\left(\dfrac{m}{2kT_i}\right)^{3/2}$	$\left(\dfrac{m}{2\pi kT_i}\right)^{3/2}$
19	1º §	... p_r da Equação 3.4	... p_r da Equação 3.3
20	Eq. 3.12	$\dfrac{\rho_i \left\lvert\bar{u}^s\right\rvert^2}{2s}$	$\dfrac{\rho_i \left\lvert\bar{u}^s\right\rvert^2}{2s^2}$
28	Seção 4.2	... num intervalo de tempo d_t	... num intervalo de tempo dt
28	Eq. 4.1	$\dfrac{d^5 E}{\cos\theta\, dA_1\, d\Omega\, d_t}$	$\dfrac{d^5 E}{\cos\theta\, dA_1\, d\Omega\, dt}$
29	2ª linha	dA_1, $d\Omega$ e d_t	dA_1, $d\Omega$ e dt
29	Eq. 4.2	$\dfrac{d^5 E}{\cos\theta\, dA_1\, d\Omega\, d_t}$	$\dfrac{d^5 E}{\cos\theta\, dA_1\, d\Omega\, dt}$
31	Eq. 4.9	$\dfrac{S_o\, R_o}{c}$	$\dfrac{S_o\, R_o^2}{c}$
36	Eq. 4.23	$\cdots + (1-\gamma\rho)\, \hat{s}^s$	$\cdots - (1-\gamma\rho)\, \hat{s}^s$
47	Eq. 4.64	$\dfrac{W_E}{4\pi\, R_T^2}\, \dfrac{(1-\alpha)}{4} S$	$\dfrac{W_E}{4\pi\, R_T^2} = \dfrac{(1-\alpha)}{4} S$
51	3º §	... por Tisserand em 1981	... por Tisserand em 1881
67	Eq. 7.1d	$= 424{,}06$ kg m^2	$= 324{,}06$ kg m^2
70	2º §	O comprimento característico ... como se segue.	O comprimento característico, L_r, para a adimensionalização dos torques será igual ao diâmetro do cilindro que envolve o prisma octagonal, ou seja: $L_r = 1$ m (7.8) Durante o cálculo tanto das forças aerodinâmicas quanto das de radiação, as partes sombreadas ou encobertas deverão ser analisadas como se segue.
89	Fig. 7.29	X^a, Y^a, Z^a	X^o, Y^o, Z^o
100	Eq. 7.9	$\delta_o = 256{,}25^o$,	$\alpha_o = 256{,}25^o$,
A-1	Eq. A.1	$\cdots + \sigma\, \pi \sqrt{\pi}\, \cos^2\alpha \sqrt{\dfrac{T_w}{T_i}}$	$\cdots + \dfrac{\sigma\, \pi \sqrt{\pi}}{4s} \cos^2\alpha \sqrt{\dfrac{T_w}{T_i}}$
B-1	Eq. B.1	$C_{RSc} = \left[\dfrac{\pi}{6}(1-\gamma\rho) + \dfrac{2}{3}\cos\alpha(1+\gamma\rho)\right]$ $\cos^2\alpha + \dfrac{1}{2}(1-\gamma\rho)\left\{\cos\alpha + \right.$ $\left.\operatorname{sen}^2\alpha \ln\left[\dfrac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}\right]\right\}$	$C_{RSc} = \left[\dfrac{\pi}{6}\cos\alpha + 1\right](1-\gamma\rho)\cos\alpha +$ $+\dfrac{4}{3}\gamma\rho\cos^3\alpha$