



Ministério da
**Ciência, Tecnologia
e Inovação**



sid.inpe.br/iris@1905/2005/07.28.23.45-PUD

INTRODUÇÃO À MECÂNICA ORBITAL -2A EDIÇÃO

Hélio Koiti Kuga
Valdemir Carrara
Kondapalli Rama Rao

Tópicos de mecânica orbital da disciplina de Adaptação, no Curso de Mestrado em Engenharia e Tecnologia Espaciais, modalidade Mecânica Espacial e Controle.

URL do documento original:

<<http://urlib.net/sid.inpe.br/iris@1905/2005/07.28.23.45>>

INPE
São José dos Campos
2012

PUBLICADO POR:

Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais - INPE

Gabinete do Diretor (GB)

Serviço de Informação e Documentação (SID)

Caixa Postal 515 - CEP 12.245-970

São José dos Campos - SP - Brasil

Tel.:(012) 3208-6923/6921

Fax: (012) 3208-6919

E-mail: pubtc@sid.inpe.br

CONSELHO DE EDITORAÇÃO E PRESERVAÇÃO DA PRODUÇÃO INTELLECTUAL DO INPE (RE/DIR-204):**Presidente:**

Marciana Leite Ribeiro - Serviço de Informação e Documentação (SID)

Membros:

Dr. Antonio Fernando Bertachini de Almeida Prado - Coordenação Engenharia e Tecnologia Espacial (ETE)

Dr^a Inez Staciarini Batista - Coordenação Ciências Espaciais e Atmosféricas (CEA)

Dr. Gerald Jean Francis Banon - Coordenação Observação da Terra (OBT)

Dr. Germano de Souza Kienbaum - Centro de Tecnologias Especiais (CTE)

Dr. Manoel Alonso Gan - Centro de Previsão de Tempo e Estudos Climáticos (CPT)

Dr^a Maria do Carmo de Andrade Nono - Conselho de Pós-Graduação

Dr. Plínio Carlos Alvalá - Centro de Ciência do Sistema Terrestre (CST)

BIBLIOTECA DIGITAL:

Dr. Gerald Jean Francis Banon - Coordenação de Observação da Terra (OBT)

REVISÃO E NORMALIZAÇÃO DOCUMENTÁRIA:

Marciana Leite Ribeiro - Serviço de Informação e Documentação (SID)

Yolanda Ribeiro da Silva Souza - Serviço de Informação e Documentação (SID)

EDITORAÇÃO ELETRÔNICA:

Ivone Martins - Serviço de Informação e Documentação (SID)



Ministério da
**Ciência, Tecnologia
e Inovação**



sid.inpe.br/iris@1905/2005/07.28.23.45-PUD

INTRODUÇÃO À MECÂNICA ORBITAL -2A EDIÇÃO

Hélio Koiti Kuga
Valdemir Carrara
Kondapalli Rama Rao

Tópicos de mecânica orbital da disciplina de Adaptação, no Curso de Mestrado em Engenharia e Tecnologia Espaciais, modalidade Mecânica Espacial e Controle.

URL do documento original:

<<http://urlib.net/sid.inpe.br/iris@1905/2005/07.28.23.45>>

INPE
São José dos Campos
2012

RESUMO

Este documento foi produzido para servir como material de apoio à disciplina de Adaptação, ministrada como pré-requisito para o aceite de candidatos ao curso de mestrado em Engenharia e Tecnologia Espacial, modalidade Mecânica Espacial e Controle, no Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais. Ela foi atualizada em anos recentes e a presente versão constitui a segunda edição, revista e melhorada. Inicia-se o estudo das órbitas de satélites artificiais com a aplicação das leis de Newton ao movimento de corpos e o estudo de trajetórias em campo de força central. As leis de Kepler são introduzidas a seguir, bem como as relações do movimento elíptico. Mostra-se então que as leis de Kepler originam-se do movimento causado pela força gravitacional entre dois corpos, apresentando-se as principais relações geométricas que definem a elipse orbital. Estuda-se em seguida o movimento no espaço, o que permite extrair as relações geométricas que transformam o movimento kepleriano em espaço de estados. Como últimos tópicos de estudo são apresentados os principais sistemas de coordenadas e de tempo para o estudo do movimento orbital.

ABSTRACT

This document aims to support students in the “Adaptation” class of the Space Mechanics and Control – Space Engineering and Technology post-graduate course at INPE. It has been updated and revised in recent years, so this is the second and most recent version. It introduces the orbit mechanics concepts by applying the Newton’s laws to the two-body problem and to the study of trajectories in a central force field. The Kepler’s laws are presented together with the equations of the elliptical motion. It is shown that the Kepler’s laws are derived from the gravitational force between two bodies, arising the geometrical relations of the orbital ellipse. The orbital elements in space are then studied, which allows to convert the geometric orbit representation, or keplerian elements, to space state representation. It is also presented the main coordinate system used in orbit and astronomic studies, as well as several time and date measuring systems.

SUMÁRIO

	<u>Pág.</u>
1	INTRODUÇÃO..... 1
2	CAMPO CENTRAL 3
2.1	Leis de Newton..... 3
2.2	Lei da gravitação universal..... 3
2.3	Força central 4
2.4	Integral do momento angular..... 4
2.5	Velocidade areolar..... 6
2.6	Trajétórias devido à força central 7
2.7	Integral da energia 9
2.8	Equação de Binet..... 10
2.9	Exercícios 11
3	LEIS DE KEPLER 13
3.1	As 3 leis de Kepler 13
3.2	Propriedades da elipse 13
3.3	Interpretação das leis de Kepler..... 14
3.3.1	1 ^a lei 14
3.3.2	2 ^a lei 15
3.3.3	3 ^a lei 15
3.4	Exercícios 16
4	PROBLEMA DOS DOIS CORPOS 19
4.1	Redução do problema dos dois corpos 19
4.2	Solução do problema dos dois corpos 20
4.2.1	Integral das áreas 20
4.2.2	Integral da energia 21
4.2.3	Solução 21
4.2.4	Energia da órbita elíptica..... 25
4.2.5	Equação da “vis-viva” 26
4.3	Movimento elíptico 26
4.3.1	Coordenadas cartesianas de posição..... 27
4.3.2	Relação entre f e u 27
4.3.3	Equação de Kepler..... 28
4.3.4	Coordenadas cartesianas de velocidade..... 30
4.4	Órbita circular..... 31
4.5	Exercícios 33
5	POSICIONAMENTO DE SATÉLITES - PROBLEMA DIRETO..... 35
5.1	Elementos keplerianos 35
5.2	Transformação de coordenadas 35
5.3	Resumo da transformação 37
5.4	Exercícios 38
6	POSICIONAMENTO DE SATÉLITES-PROBLEMA INVERSO 39
6.1	Semi-eixo maior a 39
6.2	Excentricidade e 39

6.3	Anomalia média M	40
6.4	Inclinação i	41
6.5	Ascensão reta do nodo ascendente Ω	41
6.6	Argumento do perigeu ω	42
6.7	Exercícios	44
7	SISTEMAS DE COORDENADAS CELESTES	45
7.1	Sistemas principais	45
7.1.1	Sistema horizontal (topocêntrico).....	45
7.1.2	Sistema horário (topocêntrico ou geocêntrico).....	47
7.1.3	Sistema equatorial (geocêntrico)	49
7.1.4	Sistema eclíptico.....	50
7.2	Coordenadas cartesianas geocêntricas.....	51
7.2.1	Sistema cartesiano terrestre	51
7.2.2	Sistema cartesiano celeste	51
7.3	Coordenadas cartesianas topocêntricas	52
7.3.1	Sistema topocêntrico astronômico.....	52
7.3.2	Sistema topocêntrico geodésico.....	52
7.4	Movimento aparente do Sol.....	54
7.5	Exercícios	54
8	TRANSFORMAÇÕES DE COORDENADAS	57
8.1	Transformação no plano	57
8.2	Transformação no espaço	58
8.3	Propriedades das matrizes de transformação.....	58
8.4	Exemplos de transformações	59
8.5	Exercícios	60
9	SISTEMAS DE TEMPO	61
9.1	Tempo universal	61
9.2	Tempo sideral	61
9.3	Data Juliana	64
9.4	Cálculo do tempo sideral de Greenwich.....	64
9.5	Exercícios	65
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	67

1 INTRODUÇÃO

A mecânica celeste, segundo Laplace, é um conjunto de teorias que contém os resultados das leis de gravitação universal sobre o equilíbrio e o movimento dos corpos sólidos e fluidos que compõem o sistema solar e sistemas semelhantes distribuídos no universo.

Atualmente, o conceito estende-se ao estudo dos fenômenos puramente mecânicos que ocorrem no universo, e dos problemas matemáticos que sugerem os métodos utilizados em seu estudo, seja de corpos celestes (planetas ao redor do Sol, as estrelas na galáxia), ou mesmo de sondas e satélites artificiais.

O presente trabalho apresenta uma introdução à teoria de mecânica orbital. O principal objetivo é o estudo da teoria da gravitação universal, a lei do inverso do quadrado das distâncias, e suas implicações no movimento de satélites artificiais terrestres. O trabalho é essencialmente orientado para aplicações práticas, com uso extensivo da mecânica newtoniana. A precisão atual da maioria dos instrumentos de medida utilizados em mecânica orbital dispensa o uso da teoria da relatividade de forma a simplificar a matemática utilizada bem como possibilitar o uso das hipóteses newtonianas.

A bibliografia da área é vasta, porém poucos trabalhos abordam exclusivamente os conceitos introdutórios. Recomenda-se ao leitor buscar informações adicionais em livros de astrodinâmica, em especial nos de Bate et al. (1971), Brower e Clemence (1961), Chobotov (1996), Deutsch (1963), Escobal (1965), Montenbruck e Gill (2000) e Moulton (1970).

A compreensão deste trabalho requer do leitor conhecimentos básicos de cálculo diferencial e integral, álgebra vetorial, e familiaridade com o uso de computadores.

2 CAMPO CENTRAL

O movimento de um corpo quando imerso em um campo gravitacional pode ser analisado se forem adotadas algumas hipóteses. Admite-se, a princípio, a existência de apenas um corpo gerador de forças, suficientemente afastado dos demais a ponto de se poder negligenciar os efeitos desses. Considera-se igualmente que o as dimensões do corpo sejam pequenas quando comparadas às distâncias orbitais, de forma que a força possa ser considerada como sendo gerada no centro de massa, ou seja, num campo central de forças.

2.1 Leis de Newton

Recapitula-se aqui as três leis fundamentais de Newton, que foram publicadas em seu tratado "Philosophia e Naturalis Principia Mathematica", em 1687.

- Todo corpo permanece em repouso ou em movimento uniforme, quando a força exercida sobre ele é nula, $\mathbf{F} = \mathbf{0}$.
- A taxa de mudança do momento linear (ou quantidade de movimento) é proporcional à força e na mesma direção da força:

$$\frac{d(m\mathbf{v})}{dt} = \mathbf{F} \quad (2.1)$$

onde m é a massa do corpo, \mathbf{v} é o vetor velocidade do corpo, e \mathbf{F} é a força exercida no corpo. No caso de m ser constante, vêm:

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} \quad (2.2)$$

com $\mathbf{a} = d\mathbf{v} / dt$, onde \mathbf{a} é a aceleração do corpo.

- A toda ação corresponde uma reação igual e oposta (Lei da ação e reação):

$$\mathbf{F}_A = -\mathbf{F}_B. \quad (2.3)$$

2.2 Lei da gravitação universal

Duas partículas A e B se atraem com uma força diretamente proporcional ao produto de suas massas e inversamente proporcional ao quadrado da distância entre elas:

$$\mathbf{F}_A = -G \frac{m_A m_B}{r^2} \frac{\mathbf{r}_{AB}}{r} \quad (2.4)$$

onde G é a constante de gravitação universal valendo $6,67 \times 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2$, m_A e m_B são as massas dos dois corpos, r é a distância entre eles, e \mathbf{r}_{AB} é o vetor distância que une os corpos.

A lei se aplica em princípio, a sistemas de partículas, não a corpos de dimensões finitas. Porém, a lei ainda pode ser aplicada ao assumir-se que corpos com simetria esférica se atraem como se suas massas estivessem concentradas em seus centros.

2.3 Força central

Uma força é dita "central" quando a força resultante que causa o movimento acelerado de uma partícula passa através de um ponto fixo, conforme a Figura 2.1. O ponto fixo é o centro da força. Devido a essa característica a força pode ser representada por:

$$\mathbf{F} = F(\mathbf{r}) \frac{\mathbf{r}}{r}, \quad (2.5)$$

onde $F(\mathbf{r})$ é o módulo da força que é função do vetor distância \mathbf{r} .

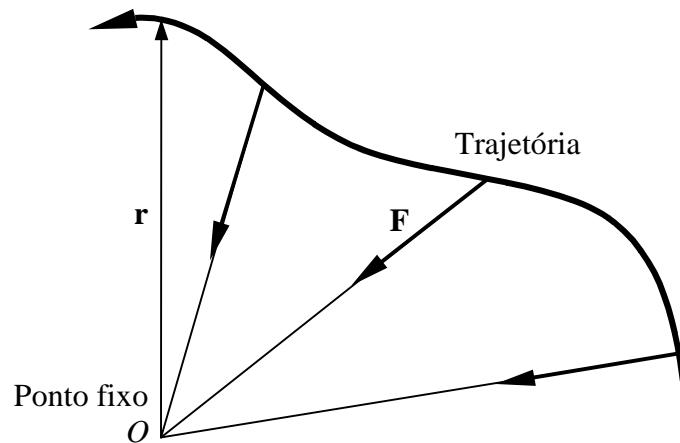


Figura 2.1 – Trajetória da força central

2.4 Integral do momento angular

Sob a ação de uma força central, existem quantidades que se conservam, isto é, existem as integrais primeiras do movimento. Tais integrais permitem simplificar e mesmo auxiliar a resolução das equações de movimento.

Mostrar-se-á que o momento angular é uma das quantidades conservadas. Seja a definição do momento angular:

$$\mathbf{H} = \sum_i \mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{v}_i \quad (2.6)$$

onde \mathbf{H} é o vetor momento angular, “ \times ” representa o produto vetorial, e $\mathbf{r} = \mathbf{P}_i - \mathbf{O}$, com O sendo o ponto fixo.

Derivando-se \mathbf{H} em relação ao tempo têm-se:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{H}} &= \sum_i \dot{\mathbf{r}}_i \times m_i \mathbf{v}_i + \sum_i \mathbf{r}_i \times \frac{d(m_i \mathbf{v}_i)}{dt} \\ &= \sum_i \mathbf{v}_i \times m_i \mathbf{v}_i + \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i\end{aligned}\quad (2.7)$$

onde a primeira parcela do lado direito é nula devido ao produto vetorial de vetores paralelos. Lembrando ainda que no caso de força central vale a Equação 2.5, chega-se a:

$$\dot{\mathbf{H}} = \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i(\mathbf{r}_i) \frac{\mathbf{r}_i}{r_i} = \mathbf{0}, \quad (2.8)$$

pois novamente têm-se um produto vetorial de vetores paralelos. Desta forma conclui-se que:

$$\mathbf{H} = \mathbf{C}, \quad (2.9)$$

onde \mathbf{C} é um vetor constante. Existem dois casos possíveis a serem analisados. O primeiro caso é quando a constante \mathbf{C} é o vetor nulo $\mathbf{0}$:

$$\mathbf{C} = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{r} \times \mathbf{v} = \mathbf{0}. \quad (2.10)$$

Neste caso ou \mathbf{r} é paralelo a \mathbf{v} e o movimento é retilíneo, ou \mathbf{v} é nulo e \mathbf{r} é constante. Este é um caso sem interesse.

O segundo caso é quando a constante \mathbf{C} não é nula. Neste caso, $\mathbf{r} \times \mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ e o movimento é "plano". Veja-se a Figura 2.2.

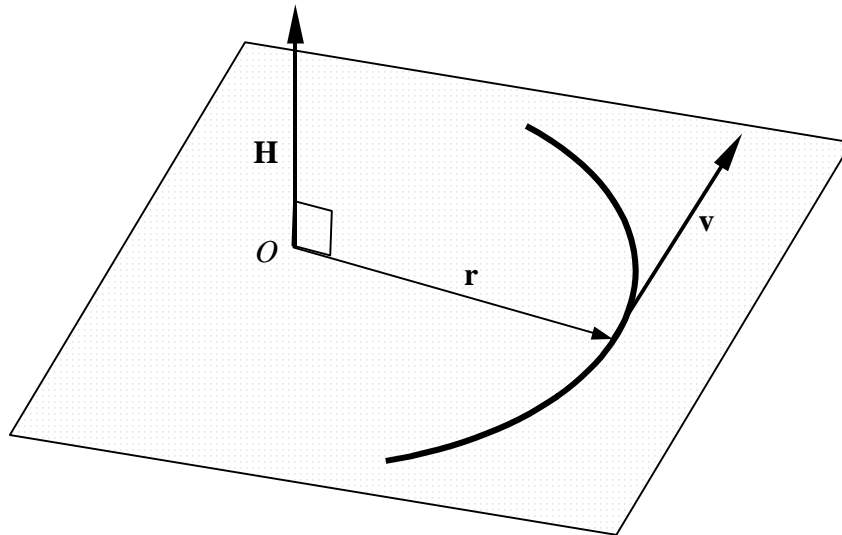


Figura 2.2 – Movimento plano da força central

Em resumo, o momento angular de uma partícula que se move sob a ação de uma força central permanece constante em magnitude e direção.

2.5 Velocidade areolar

A velocidade areolar ou taxa areolar é a taxa na qual uma determinada área é varrida durante a trajetória do raio vetor. A Figura 2.3 mostra o conceito.

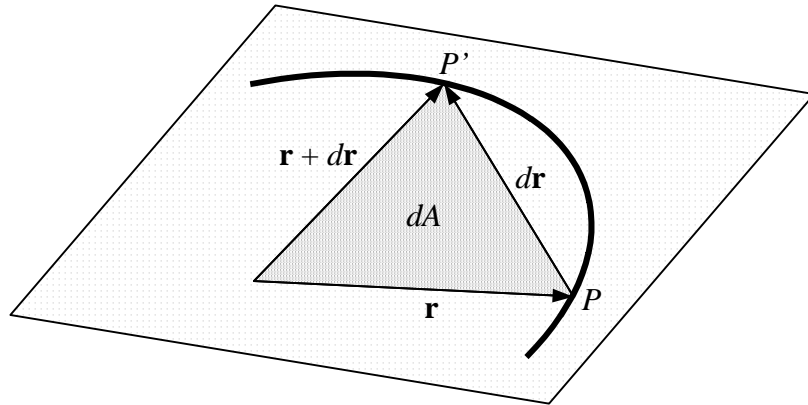


Figura 2.3 – Velocidade areolar

Na Figura 2.3, dA é a fração de área, e $d\mathbf{r}$ é a fração de arco percorrida. Lembrando que $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ é a área do paralelogramo delimitada pelos vetores \mathbf{a} e \mathbf{b} , têm-se que:

$$\Delta A \approx \frac{1}{2} \left| \mathbf{r} \times \Delta \mathbf{r} \right|, \quad (2.11)$$

ou seja:

$$\frac{\Delta A}{\Delta t} \approx \frac{1}{2} \left| \mathbf{r} \times \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} \right|. \quad (2.12)$$

No limite para $\Delta t \rightarrow 0$ têm-se:

$$\dot{A} = \frac{1}{2} \left| \mathbf{r} \times \mathbf{v} \right|. \quad (2.13)$$

Recapitulando que o momento angular é dado por $\mathbf{H} = \mathbf{r} \times m \mathbf{v}$, constante, e comparando com a Equação 2.13, chega-se a:

$$\frac{\mathbf{H}}{m} = 2\dot{A}. \quad (2.14)$$

Conclui-se portanto que o momento angular é proporcional à taxa areolar e, por consequência, a taxa areolar é constante sob a ação de uma força central.

2.6 Trajetórias devido à força central

Seja o movimento plano conforme mostrado na Figura 2.4, onde x e y são o sistema de eixos cartesianos no plano do movimento, \hat{e}_r é o versor radial, \hat{e}_t é o versor transversal perpendicular a \hat{e}_r , e f é o ângulo polar entre o eixo x e o corpo em movimento. Nota-se que \hat{e}_t não é tangente à trajetória, mas sim perpendicular a \mathbf{r} .

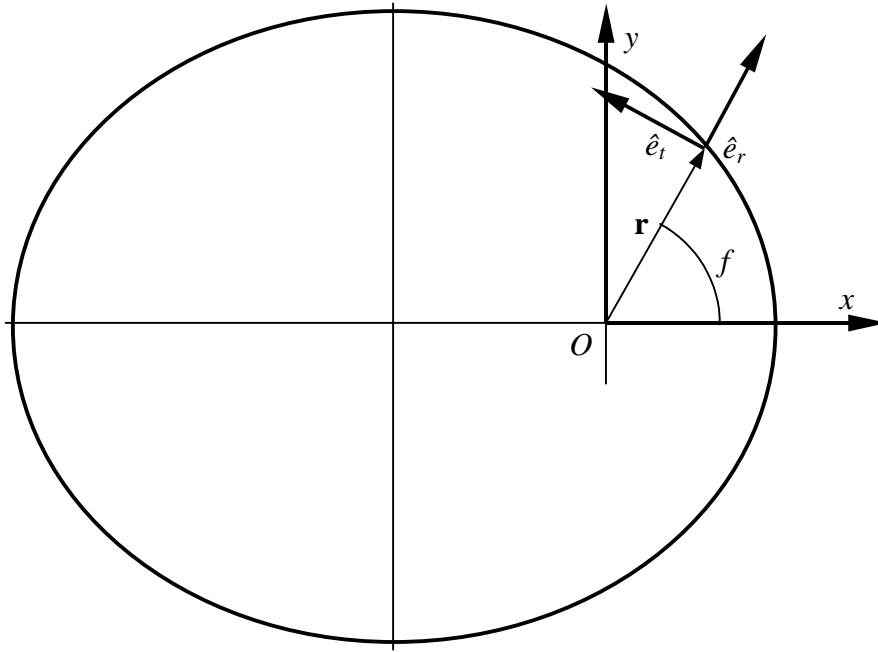


Figura 2.4 – Movimento plano

De maneira geral, a velocidade do corpo no plano pode ser descrita por suas componentes radial e transversal na forma:

$$\mathbf{v} = \dot{r} \hat{e}_r + r \dot{f} \hat{e}_t. \quad (2.15)$$

A aceleração do corpo é obtida derivando-se a velocidade em relação ao tempo:

$$\mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}} = \ddot{r} \hat{e}_r + \dot{r} \dot{\hat{e}}_r + \dot{r} \dot{f} \hat{e}_t + r \ddot{f} \hat{e}_t + r \dot{f} \dot{\hat{e}}_t, \quad (2.16)$$

e lembrando a regra de Poisson para a derivada de versor:

$$\begin{aligned} \dot{\hat{e}}_r &= \dot{f} \hat{k} \times \hat{e}_r, \\ &= \dot{f} \hat{e}_t, \\ \dot{\hat{e}}_t &= \dot{f} \hat{k} \times \hat{e}_t, \\ &= -\dot{f} \hat{e}_r, \end{aligned} \quad (2.17)$$

chega-se a:

$$\mathbf{a} = (\ddot{r} - r \dot{f}^2) \hat{e}_r + (2\dot{r} \dot{f} + r \ddot{f}) \hat{e}_t. \quad (2.18)$$

Sejam as coordenadas cartesianas do movimento plano dadas por:

$$\begin{aligned} x &= r \cos f, \\ y &= r \sin f. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Então as componentes de velocidade são:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \dot{r} \cos f - r \dot{f} \sin f, \\ \dot{y} &= \dot{r} \sin f + r \dot{f} \cos f. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Lembrando a expressão para o momento angular $\mathbf{H} = \mathbf{r} \times m \mathbf{v}$, têm-se:

$$\mathbf{r} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} x & y & 0 \\ \dot{x} & \dot{y} & 0 \\ \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \end{vmatrix} = (x\dot{y} - \dot{x}y) \hat{k}, \quad (2.21)$$

onde \hat{k} é o versor do eixo z . Logo, $\mathbf{H} = H \hat{k}$, e por substituição das componentes cartesianas vêm:

$$\frac{H}{m} = r \cos f (\dot{r} \sin f + r \dot{f} \cos f) - r \sin f (\dot{r} \cos f - r \dot{f} \sin f). \quad (2.22)$$

Simplificando, chega-se a $H / m = r^2 \dot{f} = \text{cte}$, ou seja:

$$H = mr^2 \dot{f} = \text{cte}. \quad (2.23)$$

Lembrando a Equação 2.14 da velocidade areolar, $H / m = 2\dot{A}$, têm-se também:

$$2\dot{A} = r^2 \dot{f} = \text{cte}. \quad (2.24)$$

Desta forma, derivando \mathbf{H} em relação ao tempo na Equação 2.23 vêm:

$$\frac{d\mathbf{H}}{dt} = \mathbf{0},$$

ou

$$\begin{aligned} m \frac{d}{dt}(r^2 \dot{f}) &= m (2r \dot{r} \dot{f} + r^2 \ddot{f}), \\ &= 0, \end{aligned} \quad (2.25)$$

donde se conclui que:

$$2r\dot{r}\dot{f} + r^2\ddot{f} = 0. \quad (2.26)$$

Finalmente, as componentes da aceleração, conforme a Equação 2.18 ficam:

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_t &= (2\dot{r}\dot{f} + r\ddot{f})\hat{e}_t, \\ &= \mathbf{0}, \\ \mathbf{a}_r &= (\ddot{r} - r\dot{f}^2)\hat{e}_r, \\ &= \frac{F(\mathbf{r})}{m} \frac{\mathbf{r}}{r} \neq \mathbf{0} \end{aligned} \quad (2.27)$$

onde \mathbf{a}_t é a componente transversal, e \mathbf{a}_r é a componente radial.

Portanto, as seguintes conclusões podem ser extraídas no caso da força central: \mathbf{H} é constante, a taxa areolar \dot{A} é constante, e o movimento é puramente plano. A expressão final para a aceleração devido à força central é:

$$\mathbf{a} = (\ddot{r} - r\dot{f}^2)\hat{e}_r = \frac{F(\mathbf{r})}{m} \frac{\mathbf{r}}{r}. \quad (2.28)$$

2.7 Integral da energia

Se um sistema é conservativo, então a energia do sistema se conserva. Se o trabalho só depende dos extremos de integração, i.e., independe do caminho, o sistema é conservativo. Se o sistema é conservativo a força deriva de um potencial. As asserções acima podem ser encontradas em livros básicos de Física.

Analisar-se-á o caso da força central. A força central tem como equação característica $\mathbf{F} = F(\mathbf{r}) \mathbf{r} / r$. Logo, pela definição de trabalho vêm:

$$\begin{aligned} W_{12} &= \int_1^2 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}, \\ &= \int_{r_1}^{r_2} F(\mathbf{r}) \frac{\mathbf{r}}{r} \cdot d\mathbf{r}, \\ &= \int_{r_1}^{r_2} F(\mathbf{r}) dr. \end{aligned} \quad (2.29)$$

onde " \cdot " representa o produto escalar. Por exemplo, no caso da força gravitacional $F(\mathbf{r}) = GMm/r^2$, e o trabalho vale:

$$W_{12} = GMm \int_{r_1}^{r_2} r^{-2} dr, \quad (2.30)$$

que só depende dos extremos r_1 e r_2 . Logo, pode-se concluir que uma força central sob a ação de um campo central faz parte de um sistema conservativo. A consequência imediata é que a força deriva de um potencial U e pode portanto ser representada por:

$$\mathbf{F} = -\frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}} = -\nabla U, \quad (2.31)$$

onde ∇ é a representação do gradiente.

Em resumo, para um campo central, a energia se conserva, e o potencial só depende da posição.

2.8 Equação de Binet

A equação de Binet é importante pois fornece a trajetória de um corpo num campo de força central. Define-se primeiro o operador d/dt , lembrando que $H = mr^2 \dot{f}$ é a magnitude do momento angular. O desdobramento dessa equação leva a:

$$\begin{aligned} H &= mr^2 \frac{df}{dt}, \\ dt &= \frac{mr^2}{H} df, \end{aligned} \quad (2.32)$$

de onde se extrai o operador:

$$\frac{d}{dt} = \frac{H}{mr^2} \frac{d}{df}. \quad (2.33)$$

Sua segunda derivada é simplesmente a aplicação do operador sobre ele mesmo:

$$\frac{d^2}{dt^2} = \frac{H}{mr^2} \frac{d}{df} \left(\frac{H}{mr^2} \frac{d}{df} \right). \quad (2.34)$$

Portanto, para se calcular a aceleração radial $d^2 r/dt^2$, aplica-se este operador para chegar a:

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = \frac{H}{mr^2} \frac{d}{df} \left(\frac{H}{mr^2} \frac{dr}{df} \right), \quad (2.35)$$

e lembrando que $\ddot{r} - r \dot{f}^2 = F(\mathbf{r})/m$, ou seja

$$\begin{aligned} \frac{dr^2}{dt^2} &= r \left(\frac{df}{dt} \right)^2 + \frac{F(\mathbf{r})}{m}, \\ &= \frac{H^2}{m^2 r^3} + \frac{F(\mathbf{r})}{m}, \end{aligned} \quad (2.36)$$

igualem-se ambas as expressões para a aceleração:

$$\frac{H^2}{m^2 r^3} + \frac{F(\mathbf{r})}{m} = \frac{H}{mr^2} \frac{d}{df} \left(\frac{H}{mr^2} \frac{dr}{df} \right),$$

$$\frac{H}{mr^2} \left[\frac{1}{mr} - \frac{1}{H} \frac{d}{df} \left(\frac{H}{mr^2} \frac{dr}{df} \right) \right] = -\frac{F(\mathbf{r})}{m}. \quad (2.37)$$

Usa-se agora a seguinte transformação de variáveis para simplificar a expressão:

$$u = 1/r,$$

$$du = -\frac{1}{r^2} dr, \quad (2.38)$$

$$\frac{dr}{du} = -r^2.$$

Tal transformação produz o seguinte desenvolvimento:

$$\frac{H^2 u^2}{m} \left[\frac{u}{m} - \frac{1}{H} \frac{d}{df} \left(\frac{H}{mr^2} \frac{dr}{du} \frac{du}{df} \right) \right] = -\frac{F(\mathbf{r})}{m}, \quad (2.39)$$

e finalmente, a forma da equação de Binet:

$$\frac{H^2 u^2}{m^2} \left[u + \frac{d^2 u}{df^2} \right] = -\frac{F(\mathbf{r})}{m}. \quad (2.40)$$

Esta equação diz que para qualquer força central $F(\mathbf{r})$, pode-se determinar a trajetória de um corpo sujeito a essa força central.

2.9 Exercícios

1. Calcular o módulo das forças de atração do Sol, Lua e Marte sobre a Terra. Utilize os seguintes dados:

- Distância Lua-Terra = $60,2 R_t$
- Distância Sol-Terra = $149,6 \times 10^6$ Km
- Distância Terra-Marte = 70×10^6 Km
- Raio da Terra $R_t = 6378$ Km
- Massa da Terra = $5,97 \times 10^{24}$ Kg
- Massa do Sol = $332958 \times$ Massa da Terra
- Massa de Marte = $0,1 \times$ Massa da Terra
- Massa da Lua = $7,34 \times 10^{22}$ Kg

2. Demonstrar que o sistema de equações formado pelas integrais primeiras da área e da energia formam um sistema equivalente ao das equações diferenciais do movimento,

isto é, se $r^2\dot{\phi} = C = \text{constante}$, e $\frac{1}{2}m\dot{\mathbf{r}}^2 - U(r) = E = \text{constante}$, então:

$$m(\ddot{r} - r\dot{\phi}^2) = f(r),$$

onde $f = |\mathbf{f}| = \frac{dU}{dr}$.

3 LEIS DE KEPLER

O astrônomo dinamarquês Tycho Brahe (1546-1601) deu uma grande contribuição quando montou um gigantesco catálogo de observações dos planetas. A característica mais importante de tais observações era a precisão. A precisão era suficiente para discriminar entre hipóteses verdadeiras ou falsas sobre as várias teorias especulativas existentes na época. O próprio Tycho Brahe não conseguiu formular um modelo que ajustasse as observações, contendo o movimento dos planetas ao redor do Sol. O principal problema era o planeta Marte. Órbitas circulares não ajustavam o movimento de Marte (Marte tem uma órbita elíptica com excentricidade igual a 0,1).

Kepler (1571-1630) analisou as observações de Tycho Brahe e após anos de tentativas de ajuste, conseguiu conceituar o movimento de Marte. Seu tratado "Astronomia Nova" discute o movimento de Marte, bem como formula as famosas leis de Kepler.

3.1 As 3 leis de Kepler

1ª lei: "Lei das órbitas elípticas". As órbitas dos planetas são elipses com o Sol como foco. Generalizando, a órbita de um corpo num campo de força central é uma cônica (elipse, hipérbole, parábola) com o foco no centro de atração.

2ª lei: "Lei das áreas". O raio vetor de cada planeta com relação ao Sol como origem, varre áreas iguais em tempos iguais. Esta é de fato uma propriedade de seções cônicas, expressa por $\dot{A} = \text{cte}$, onde A é a área.

3ª lei: "Lei harmônica". A relação dos quadrados dos períodos entre 2 planetas é igual à relação do cubo do semi-eixo maior de suas órbitas. Assim, seja o planeta p_i com período T_i e semi-eixo maior a_i . Vale então $(T_1/T_2)^2 = (a_1/a_2)^3 = \text{cte}$.

3.2 Propriedades da elipse

Elipse é um lugar geométrico de um ponto que se move de forma a que sua distância a partir de um ponto fixo, o foco, mantém uma relação constante (<1) com sua distância a partir de uma linha fixa, a diretriz. De acordo com a Figura 3.1, valem as seguintes definições: r é a distância do foco ao ponto P , f é o ângulo entre o eixo origem e o ponto P , centrado no foco, $e < 1 = SP / PM$ é a excentricidade, S é o foco, S' é o outro foco (virtual), a é o semi-eixo maior, com $AA' = 2a$, e b é o semi-eixo menor, com $BB' = 2b$.

As seguintes relações são também válidas:

$$e = CS / CA, \quad (3.1)$$

$$2a = SP + PS' = \text{cte}, \quad (3.2)$$

$$2p = QQ', \quad (3.3)$$

$$p = a(1 - e^2), \quad (3.4)$$

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1+e \cos f}, \quad (3.5)$$

$$= \frac{p}{1+e \cos f}, \quad (3.6)$$

onde p recebe a denominação de "semi-latus rectum".

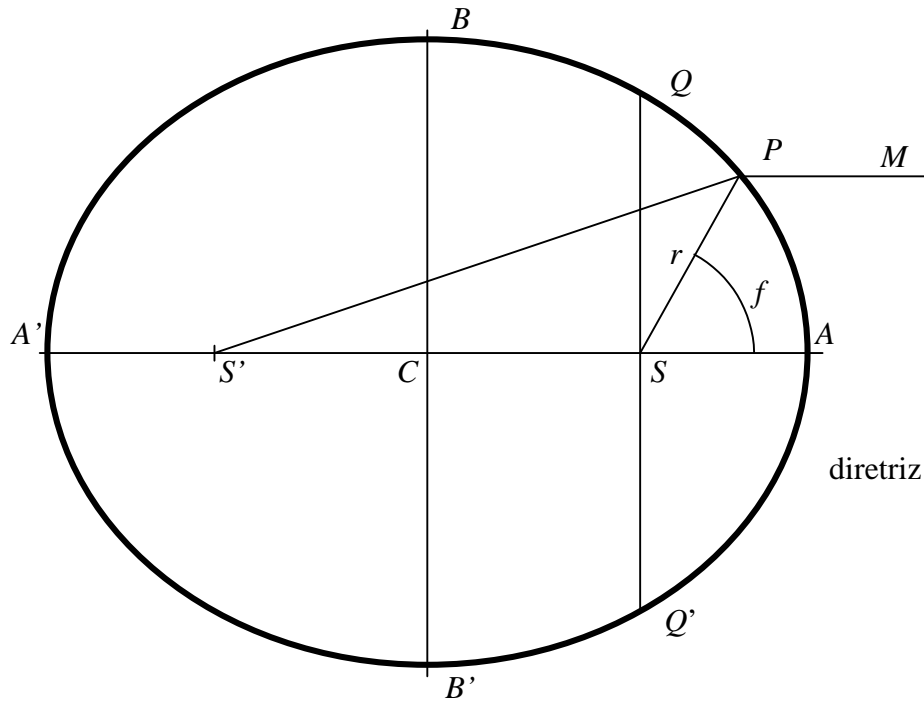


Figura 3.1 – Parâmetros da elipse

3.3 Interpretação das leis de Kepler

3.3.1 1ª lei

A 1ª lei diz que o movimento planetário é elíptico. Dada a equação da elipse:

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1+e \cos f}, \quad (3.7)$$

e lembrando a Equação de Binet 2.40:

$$\frac{F(\mathbf{r})}{m} = -\frac{H^2}{m^2 r^2} \left[\frac{1}{r} + \frac{d^2(1/r)}{df^2} \right], \quad (3.8)$$

deriva-se $1/r$ através da equação da elipse:

$$\frac{d(1/r)}{df} = -\frac{e \operatorname{sen} f}{a(1-e^2)},$$

$$\frac{d^2(1/r)}{df^2} = -\frac{e \cos f}{a(1-e^2)},$$
(3.9)

para se chegar a:

$$\frac{1}{r} + \frac{d^2(1/r)}{df^2} = \frac{1}{a(1-e^2)}.$$
(3.10)

A partir do fato de que só existe aceleração radial num campo central, i.e., $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = F(\mathbf{r}) \mathbf{r} / r$, chega-se à seguinte expressão:

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\frac{H^2}{mr^2} \frac{1}{a(1-e^2)} \frac{\mathbf{r}}{r}.$$
(3.11)

Logo se conclui que a força está dirigida para o Sol, e é inversamente proporcional ao quadrado da distância Sol-planeta. Fica evidente que esta expressão redundava na lei de Newton da gravitação universal, na forma:

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\mu \frac{m}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r},$$
(3.12)

onde

$$\mu = \frac{H^2}{m^2 a(1-e^2)}.$$
(3.13)

3.3.2 2ª lei

De fato, já foi obtido que $da/dt = \text{cte} = H/2m$. Dado que a taxa areolar \dot{A} equivale à relação entre a área da elipse pelo período orbital, têm-se que

$$\dot{A} = \frac{\pi ab}{T},$$
(3.14)

ou seja, a 2ª lei decorre das leis de campo central.

3.3.3 3ª lei

A 3ª lei é de fato apenas uma derivação da 2ª lei. Quadrando a taxa areolar têm-se:

$$\begin{aligned}
\dot{A}^2 &= \pi^2 a^2 b^2 / T^2 \\
&= \pi^2 a^4 (1 - e^2) / T^2 \\
&= H^2 / 4m^2
\end{aligned}
\tag{3.15}$$

Isolando o termo μ vem:

$$\begin{aligned}
\mu &= \frac{H^2}{m^2 a (1 - e^2)} \\
&= \frac{4\pi^2 a^3}{T^2} \\
&= \text{cte}
\end{aligned}
\tag{3.16}$$

Logo chega-se a conclusão que:

$$\frac{a^3}{T^2} = \text{cte} \quad .
\tag{3.17}$$

3.4 Exercícios

1. Calcular o semi-eixo maior de um satélite geocêntrico, estacionário em relação a um ponto na superfície da Terra. Supor o centro da Terra como o ponto fixo da força central. Usar $\mu = 3.986 \times 10^5 \text{ Km}^3/\text{s}^2$.
2. Provar que o semi-latus rectum p vale $p = a(1 - e^2)$, onde a é o semi-eixo maior e e a excentricidade.
3. Provar que a equação da elipse em coordenadas polares pode ser dada por:

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos f}$$

4. Se a equação de um satélite terrestre é dada por:

$$\frac{x^2}{9 R_t^2} + \frac{y^2}{4 R_t^2} = 1$$

onde R_t é o raio da Terra, $\mu = 3.986 \times 10^5 \text{ Km}^3/\text{s}^2$, e x e y são os eixos simétricos da elipse, e dada que a energia da órbita vale $E = -\mu / 2a$, obter:

- a) A distância da Terra a partir do eixo y ,
- b) O semi-eixo maior, excentricidade da órbita e semi-latus rectum,
- c) O período da órbita,
- d) A velocidade tangencial do satélite quando a anomalia verdadeira (ângulo polar f) é 60° ,

e) Analisar se o satélite foi lançado numa órbita possível.

4 PROBLEMA DOS DOIS CORPOS

Considere-se um satélite artificial em órbita kepleriana ao redor da Terra. Suponha que a massa da Terra esteja concentrada em seu centro. O problema a ser estudado é o de determinar a trajetória de um ponto material (satélite) de massa m sujeito à ação de uma força dirigida ao centro da Terra.

4.1 Redução do problema dos dois corpos

Seja o sistema de referência "inercial" $Oxyz$, com a Terra sendo o ponto P_1 de massa m_1 e raio vetor \mathbf{r}_1 , e com o satélite sendo P_2 de massa m_2 e raio vetor \mathbf{r}_2 , conforme a Figura 4.1.

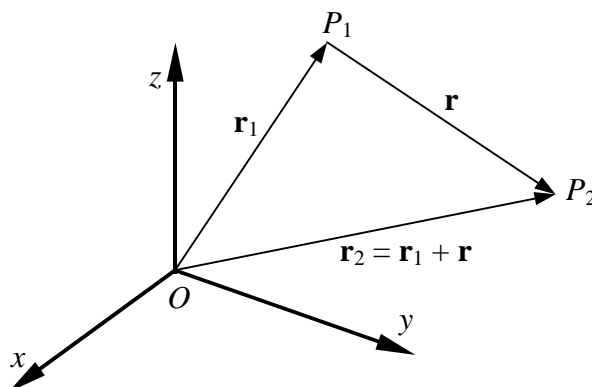


Figura 4.1 - Sistema de coordenadas no problema dos dois corpos.

De acordo com a lei de gravitação universal de Newton, a força que m_j exerce sobre m_i é dada por:

$$\mathbf{F}_{ij} = -G m_i m_j \frac{P_i - P_j}{r^3}, \quad (4.1)$$

com $i \neq j$ e $r = |\mathbf{r}|$. Pela 2ª lei de Newton tem-se:

$$m_1 \ddot{\mathbf{r}}_1 = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \frac{P_1 - P_2}{r}, \quad (4.2)$$

$$m_2 \ddot{\mathbf{r}}_2 = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \frac{P_2 - P_1}{r}. \quad (4.3)$$

Basicamente, a redução do problema dos dois corpos consiste em determinar o movimento de P_2 em relação a P_1 . As acelerações podem ser escritas na forma:

$$\ddot{\mathbf{r}}_1 = +G m_2 \frac{\mathbf{r}}{r^3}, \quad (4.4)$$

$$\ddot{\mathbf{r}}_2 = -G m_1 \frac{\mathbf{r}}{r^3}. \quad (4.5)$$

Como o sistema de coordenadas é inercial pode-se escrever também que:

$$\ddot{\mathbf{r}} = \ddot{\mathbf{r}}_2 - \ddot{\mathbf{r}}_1, \quad (4.6)$$

de modo que:

$$\ddot{\mathbf{r}} = -G(m_1 + m_2) \frac{\mathbf{r}}{r^3}. \quad (4.7)$$

Esta é a equação diferencial do movimento de um corpo em relação ao outro. Na teoria de satélites artificiais, identifica-se que:

$$\begin{aligned} m_1 &= m_{Terra}, \\ m_2 &= m_{Sat}, \end{aligned}$$

e como $m_1 \gg m_2$ tem-se $G(m_1 + m_2) \approx G m_{Terra} = \mu$. Portanto, a expressão final da aceleração é simplificada para:

$$\ddot{\mathbf{r}} = -GM \frac{\mathbf{r}}{r^3}, \quad (4.8)$$

onde M é a massa da Terra, e G é a constante gravitacional universal. O valor da constante geo-gravitacional μ é $3,986 \times 10^{14} \text{ m}^3/\text{s}^2$.

4.2 Solução do problema dos dois corpos

Notou-se que a redução do problema dos dois corpos leva a uma expressão para a aceleração, com característica de força central:

$$\ddot{\mathbf{r}} = -GM \frac{\mathbf{r}}{r^3}, \quad (4.9)$$

ou

$$\mathbf{F} = -\frac{GMm}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r}. \quad (4.10)$$

Portanto, o movimento de satélites ao redor da Terra pode ser interpretado como uma trajetória sob a ação de um campo central, onde o ponto fixo é o centro da Terra. Por conseguinte, valem todas as teorias já vistas sobre o campo central.

Existem duas integrais primeiras que auxiliarão na solução do problema dos dois corpos: Integral das áreas, e Integral da energia.

4.2.1 Integral das áreas

Esta integral já foi obtida anteriormente. Recapitula-se que a trajetória de partículas sob a influência de um campo central gera um movimento plano:

$$\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}} = \frac{\mathbf{H}}{m} = \text{cte} . \quad (4.11)$$

Mostrou-se que esta expressão é equivalente a:

$$r^2 \dot{f} = \frac{H}{m} = 2\dot{A} = \text{cte} . \quad (4.12)$$

4.2.2 Integral da energia

A integral da energia, pode ser derivada a partir da seguinte expressão:

$$\ddot{\mathbf{r}} \cdot \dot{\mathbf{r}} = -\mu \frac{\mathbf{r}}{r^3} \cdot \dot{\mathbf{r}} . \quad (4.13)$$

Lembrando que:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \dot{\mathbf{r}}^2 &= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\dot{\mathbf{r}} \cdot \dot{\mathbf{r}}) = \ddot{\mathbf{r}} \cdot \dot{\mathbf{r}}, \\ \mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{r}} &= \frac{1}{2} \frac{dr^2}{dt}, \end{aligned} \quad (4.14)$$

pois $r^2 = \mathbf{r} \cdot \mathbf{r}$, e substituindo tais relações na Equação 4.9 têm-se:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \dot{\mathbf{r}}^2 &= -\frac{\mu}{r^3} \frac{1}{2} \frac{dr^2}{dt}, \\ \dot{\mathbf{r}}^2 &= -\mu \int \frac{dr^2}{r^3}. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Uma vez que se faça seguinte transformação de variáveis $u = r^2$ e portanto $u^{3/2} = r^3$, a integral fica:

$$\int \frac{dr^2}{r^3} = \int \frac{du}{u^{3/2}} = -2u^{-1/2} = -2/r . \quad (4.16)$$

Logo a integração fornece $\dot{\mathbf{r}}^2 = 2\mu/r + 2E$, onde $2E$ é uma constante de integração.

Lembrando que $\dot{\mathbf{r}}^2 = v^2$ onde v é a magnitude da velocidade, a equação final fica:

$$\frac{v^2}{2} - \frac{\mu}{r} = E, \quad (4.17)$$

onde E é a energia (constante) da órbita.

4.2.3 Solução

Com o conhecimento das integrais primeiras do movimento orbital, qual sejam, integral da área e integral da energia, é possível obter a solução do movimento orbital plano. Inicia-se a partir do quadrado da velocidade:

$$\mathbf{v} = \dot{r} \hat{e}_r + r\dot{f} \hat{e}_t, \quad (4.18)$$

$$v^2 = \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = \dot{r}^2 + r^2 \dot{f}^2. \quad (4.19)$$

Lembrando da integral da área, $r^2 \dot{f} = h = H / m$, têm-se:

$$\begin{aligned} v^2 &= \left(\frac{dr}{df} \frac{df}{dt} \right)^2 + \frac{H}{m} \frac{df}{dt}, \\ &= \left(\frac{dr}{df} \right)^2 \left(\frac{H}{mr^2} \right)^2 + \frac{H}{m} \left(\frac{H}{mr^2} \right), \\ &= \left(\frac{H}{mr^2} \right)^2 \left(\frac{dr}{df} \right)^2 + \frac{H^2}{m^2 r^2}. \end{aligned} \quad (4.20)$$

Porém, pela integral da energia, $v^2 = 2(E + \mu / r)$, têm-se:

$$2(E + \mu / r) = \left(\frac{H}{mr^2} \right)^2 \left(\frac{dr}{df} \right)^2 + \frac{H^2}{m^2 r^2}. \quad (4.21)$$

Daí, isolando o termo em dr / df , obtém-se:

$$\left(\frac{dr}{df} \right)^2 = \left(\frac{mr^2}{H} \right)^2 \left(2E + 2\frac{\mu}{r} - \frac{H^2}{m^2 r^2} \right), \quad (4.22)$$

$$\frac{dr}{df} = \frac{mr^2}{H} \left(2E + 2\frac{\mu}{r} - \frac{H^2}{m^2 r^2} \right)^{1/2}. \quad (4.23)$$

Agora, a solução poderá ser obtida ao se notar a transformação de variáveis que simplifica a equação diferencial. Definindo:

$$u = \frac{1}{r} - \frac{\mu}{(H/m)^2}, \quad (4.24)$$

tem-se que:

$$\begin{aligned} \frac{du}{df} &= \frac{d(1/r)}{df} = -\frac{1}{r^2} \frac{dr}{df}, \\ \frac{dr}{df} &= -r^2 \frac{du}{df}. \end{aligned} \quad (4.25)$$

Lembrando a Equação 4.1, tem-se o seguinte desenvolvimento:

$$\begin{aligned}
r^4 \left(\frac{du}{df} \right)^2 &= \left(\frac{mr^2}{H} \right)^2 \left(2E + 2\frac{\mu}{r} - \frac{H^2}{m^2 r^2} \right), \\
\left(\frac{du}{df} \right)^2 &= \left(\frac{m}{H} \right)^2 \left(2E + 2\frac{\mu}{r} - \frac{H^2}{m^2 r^2} \right), \\
&= \left(\frac{2E}{(H/m)^2} + \frac{2\mu}{(H/m)^2 r} - \frac{1}{r^2} \right).
\end{aligned} \tag{4.26}$$

Mas pela Equação 4.24, u^2 vale:

$$u^2 = \frac{1}{r^2} - \frac{2\mu}{r(H/m)^2} + \frac{\mu^2}{(H/m)^4}, \tag{4.27}$$

que substituída na equação diferencial para du/df resulta:

$$\left(\frac{du}{df} \right)^2 = \frac{2E}{(H/m)^2} - u^2 + \frac{\mu^2}{(H/m)^4}, \tag{4.28}$$

$$\left(\frac{du}{df} \right)^2 + u^2 = \frac{2E}{(H/m)^2} + \frac{\mu^2}{(H/m)^4}. \tag{4.29}$$

Nota-se que os termos do lado direito são constantes, de forma que é conveniente redefini-los para:

$$\beta^2 \equiv \frac{2E}{(H/m)^2} + \frac{\mu^2}{(H/m)^4}, \tag{4.30}$$

de modo que a equação diferencial a ser integrada é simplesmente:

$$\frac{du}{df} = (\beta^2 - u^2)^{1/2}, \tag{4.31}$$

ou seja:

$$\frac{du}{(\beta^2 - u^2)^{1/2}} = df. \tag{4.32}$$

A integral indefinida do lado esquerdo tem a seguinte solução:

$$\int \frac{du}{(\beta^2 - u^2)^{1/2}} = \text{sen}^{-1} \left(\frac{u}{\beta} \right). \tag{4.33}$$

Logo, a Equação diferencial 4.32 têm como solução final:

$$\text{sen}^{-1}(u/\beta) = \theta - \bar{\theta}, \quad (4.34)$$

onde $\bar{\theta}$ é uma constante de integração. Colocar-se-á a solução em termos do co-seno por conveniência, por exemplo, fazendo $\bar{\theta} = \theta_o - 90^\circ$:

$$\cos\Delta\theta = \frac{u}{\beta}, \quad (4.35)$$

onde $\Delta\theta = \theta - \theta_o$. A substituição das definições de u e β , Equações 4.24 e 4.30, junto com $h=H/m$ (momento angular específico), leva a:

$$\cos\Delta\theta = u/\beta = \left(\frac{1}{r} - \frac{\mu}{h^2}\right) / \left(\frac{2E}{h^2} + \frac{\mu^2}{h^4}\right)^{1/2}, \quad (4.36)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} &= \frac{\mu}{h^2} + \frac{1}{h} \left(2E + \frac{\mu^2}{h^2}\right)^{1/2} \cos\Delta\theta, \\ &= \frac{\mu}{h^2} \left[1 + \frac{h}{\mu} \left(2E + \frac{\mu^2}{h^2}\right)^{1/2} \cos\Delta\theta\right], \end{aligned} \quad (4.37)$$

e finalmente:

$$\frac{1}{r} = \frac{1 + \left(2Eh^2 / \mu^2 + 1\right)^{1/2} \cos\Delta\theta}{h^2 / \mu}. \quad (4.38)$$

Percebe-se que esta equação é a própria equação da elipse disfarçada. Recapitulando a equação da elipse:

$$\frac{1}{r} = \frac{1 + e \cos f}{p}, \quad (4.39)$$

pode-se extrair as seguintes igualdades:

$$e = \left(2E \frac{h^2}{\mu^2} + 1\right)^{1/2}, \quad (4.40)$$

$$p = \frac{h^2}{\mu}, \quad (4.41)$$

onde e é a excentricidade da elipse, e p é o "semi-latus rectum". Identifica-se ainda $\cos\Delta\theta = \cos f$, onde f é o ângulo polar desde o perigeu.

O valor e sinal da energia E define o tipo de cônica da órbita, como mostrado na Tabela 4.1.

Tabela 4.1 – Excentricidade orbital

Energia	Excentricidade	Cônica
$E < 0$	$0 \leq e < 1$	elipse
$E = 0$	$e = 1$	parábola
$E > 0$	$e > 1$	Hipérbole

Observou-se que em órbitas elípticas, o "semi-latus rectum" p vale $p = a(1 - e^2)$. Portanto $a(1 - e^2) = h^2 / \mu$. Pela integral das áreas $H / m = h = 2\dot{A}$, ou seja:

$$2\dot{A} = 2 \frac{\pi ab}{T} = \frac{2\pi a^2 (1 - e^2)^{1/2}}{T}. \quad (4.42)$$

Portanto, vale:

$$\mu = \frac{4\pi^2 a^4 (1 - e^2) / T^2}{a(1 - e^2)} = 4\pi^2 \frac{a^3}{T^2}, \quad (4.43)$$

que é novamente a já familiar expressão da 3ª lei de Kepler.

4.2.4 Energia da órbita elíptica

O valor da energia para órbitas elípticas pode agora ser deduzido a partir da expressão para a excentricidade. Dada a Equação 4.40, obtém-se:

$$\begin{aligned} e^2 &= 1 + \frac{2Eh^2}{\mu^2}, \\ &= 1 + 2E \frac{p}{\mu}. \end{aligned} \quad (4.44)$$

Isolando E chega-se a:

$$\begin{aligned} E &= \frac{\mu e^2 - 1}{p \cdot 2}, \\ &= \frac{\mu(e^2 - 1)}{2a(1 - e^2)}, \end{aligned} \quad (4.45)$$

e portanto:

$$E = -\frac{\mu}{2a}. \quad (4.46)$$

4.2.5 Equação da "vis-viva"

A chamada equação da "vis-viva" (energia viva) é uma expressão que permite cálculo imediato da velocidade orbital. Ela é deduzida a partir do conhecimento do valor da energia orbital. Obteve-se anteriormente que:

$$v^2 / 2 - \mu / r = E. \quad (4.47)$$

Agora, com o valor da energia calculada pela Equação 4.22 chega-se a:

$$\begin{aligned} v^2 &= 2 \left(\frac{\mu}{r} - \frac{\mu}{2a} \right), \\ &= \mu \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right), \end{aligned} \quad (4.48)$$

que é a equação da "vis-viva".

4.3 Movimento elíptico

Mostra-se aqui as relações geométricas do movimento elíptico. Seja a Figura 4.2, com as seguintes definições: f é a anomalia verdadeira, u é a anomalia excêntrica, r_p é o periapse, perihélio, ou perigeu; r_a é o apoapse, afélio, ou apogeu; a é o semi-eixo maior, b é o semi-eixo menor, e p é o "semi-latus rectum".

Como $r_p + r_a = 2a$ e $r_a - r_p = 2c$ tem-se:

$$e = c / a = \frac{r_a - r_p}{r_a + r_p}. \quad (4.49)$$

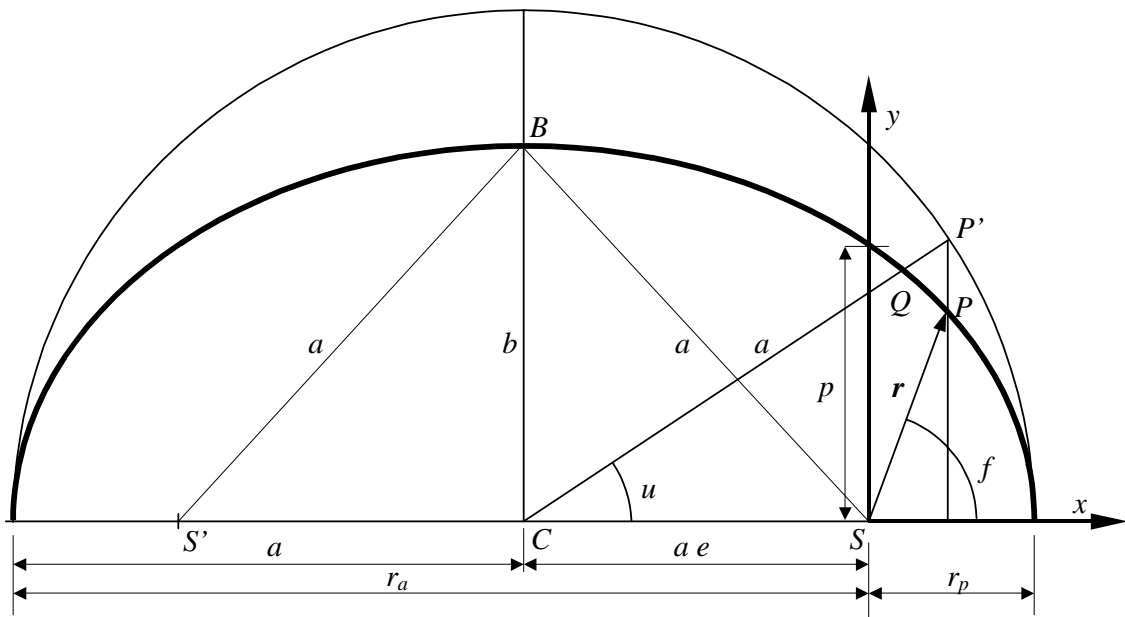


Figura 4.2 - Elipse do movimento orbital

A partir da equação da elipse $r = p / (1 + e \cos f)$ deduz-se que quando $f = 0^\circ$ o satélite está no ponto da trajetória mais próxima da Terra (perigeu) onde $r = r_p$, e quando $f = 180^\circ$ o satélite está mais distante (apogeu), onde $r = r_a$. Daí vêem que o "semi-latus rectum" vale:

$$p = r_p(1 + e) = r_a(1 - e). \quad (4.50)$$

4.3.1 Coordenadas cartesianas de posição

A partir da Figura 4.2 pode-se calcular as coordenadas cartesianas de posição referidas ao sistema Oxy , com a origem O no foco da elipse, o eixo Ox apontando para o perigeu, e o eixo Oy a 90° de Ox no sentido anti-horário. A coordenada x vale:

$$x = r \cos f = a \cos u - c, \quad (4.51)$$

$$x = a (\cos u - e). \quad (4.52)$$

Em seguida, calcula-se o raio em termos da anomalia excêntrica u . A partir da equação da elipse $r = p / (1 + e \cos f)$ tem-se que:

$$\begin{aligned} p &= r + e r \cos f, \\ &= r + e x, \end{aligned} \quad (4.53)$$

$$\begin{aligned} a(1 - e^2) &= r + e a (\cos u - e), \\ r &= a - a e^2 - a e \cos u + a e^2, \end{aligned} \quad (4.54)$$

ou seja,

$$r = a(1 - e \cos u). \quad (4.55)$$

Para a coordenada y parte-se de $y^2 = r^2 - x^2$, e daí:

$$\begin{aligned} y^2 &= a^2(1 - e \cos u)^2 - a^2(\cos u - e)^2, \\ &= a^2(1 - 2e \cos u + e^2 \cos^2 u - \cos^2 u + 2e \cos u - e^2), \\ &= a^2(1 - e^2)(1 - \cos^2 u). \end{aligned} \quad (4.56)$$

Logo,

$$y = r \sin f = a \sin u (1 - e^2)^{1/2}. \quad (4.57)$$

4.3.2 Relação entre f e u

Dado $x = r \cos f = a (\cos u - e)$, e $r = a(1 - e \cos u)$, têm-se:

$$\cos f = x/r = \frac{\cos u - e}{1 - e \cos u}. \quad (4.58)$$

Mas, lembrando a relação trigonométrica do arco metade

$$\tan^2(f/2) = \frac{1 - \cos f}{1 + \cos f}, \quad (4.59)$$

vem:

$$\begin{aligned} \tan^2(f/2) &= \frac{1 - (\cos u - e)/(1 - e \cos u)}{1 + (\cos u - e)/(1 - e \cos u)}, \\ &= \frac{1 - e \cos u - \cos u + e}{1 - e \cos u + \cos u - e}, \\ &= \frac{(1+e)(1 - \cos u)}{(1-e)(1 + \cos u)}, \end{aligned} \quad (4.60)$$

e portanto

$$\tan^2(f/2) = \frac{1+e}{1-e} \tan^2(u/2). \quad (4.61)$$

4.3.3 Equação de Kepler

A equação de Kepler fornece uma relação entre a anomalia excêntrica e o tempo. Através dela é possível localizar onde o satélite se encontra em determinado instante. A dedução da equação de Kepler se inicia com a equação da elipse:

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} &= \frac{1 + e \cos f}{p}, \\ &= \frac{1}{a(1-e^2)} + \frac{e \cos f}{a(1-e^2)}. \end{aligned} \quad (4.62)$$

Derivando $1/r$ em relação a f vem:

$$\frac{d(1/r)}{df} = \frac{-e \operatorname{sen} f}{a(1-e^2)}, \quad (4.63)$$

e como

$$\frac{d(1/r)}{df} = -\frac{1}{r^2} \frac{dr}{df}, \quad (4.64)$$

vem

$$r^2 df = \frac{a(1-e^2)}{e \operatorname{sen} f} dr. \quad (4.65)$$

Lembrando que:

$$r = a(1 - e \cos u), \quad (4.66)$$

$$dr = a e \operatorname{sen} u \, du, \quad (4.67)$$

e lembrando a Equação 4.57, com $\operatorname{sen} f = y/r$, tem-se:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} f &= \frac{a \operatorname{sen} u (1-e^2)^{1/2}}{a(1-e \cos u)}, \\ &= \frac{\operatorname{sen} u (1-e^2)^{1/2}}{1-e \cos u}. \end{aligned} \quad (4.68)$$

Substituindo este resultado na Equação 4.65, junto com 4.67 chega-se a:

$$\begin{aligned} r^2 df &= \frac{a(1-e^2)}{e} \frac{1-e \cos u}{\operatorname{sen} u (1-e^2)^{1/2}} a e \operatorname{sen} u \, du, \\ &= a^2(1-e^2)^{1/2}(1-e \cos u) \, du. \end{aligned} \quad (4.69)$$

Dividindo ambos os membros por dt , e lembrando da integral da área,

$$r^2 \frac{df}{dt} = h = (\mu p)^{1/2}, \quad (4.70)$$

vem

$$\begin{aligned} (\mu p)^{1/2} &= a^2(1-e^2)^{1/2}(1-e \cos u) \frac{du}{dt} \\ (\mu p)^{1/2} dt &= a^2(1-e^2)^{1/2}(1-e \cos u) \, du \\ \left[\mu a(1-e^2) \right]^{1/2} dt &= a^2(1-e^2)^{1/2}(1-e \cos u) \, du \\ (\mu a)^{1/2} dt &= a^2(1-e \cos u) \, du \\ (\mu / a^3)^{1/2} dt &= (1-e \cos u) \, du \end{aligned} \quad (4.71)$$

Supondo a constante de integração T , de tal modo que para $t = T$ (passagem pelo perigeu), $u = 0$, a integração da equação fornece:

$$\begin{aligned} (\mu / a^3)^{1/2} (t-T) &= \int_0^u (1-e \cos u) \, du, \\ &= [u - e \operatorname{sen} u]_0^u, \\ &= u - e \operatorname{sen} u. \end{aligned} \quad (4.72)$$

Agora, definindo-se a velocidade angular $n = (\mu/a^3)^{1/2}$, também chamada de movimento médio ("mean mean motion"), por ser a velocidade angular média do movimento orbital, tem-se:

$$n(t - T) = u - e \operatorname{sen} u . \quad (4.73)$$

O lado esquerdo da equação é um ângulo M denominado de anomalia média:

$$M = n(t - T) . \quad (4.74)$$

Portanto a forma final da equação de Kepler é:

$$M = u - e \operatorname{sen} u . \quad (4.75)$$

É importante lembrar que dada a anomalia verdadeira f , pode-se calcular a anomalia excêntrica u e daí, pela equação de Kepler, calcular a anomalia média. O caminho contrário também é válido. A equação de Kepler é uma equação transcendental que pode ser resolvida de várias maneiras. A mais comum é a utilização do método de Newton-Raphson, com o auxílio de computador.

4.3.4 Coordenadas cartesianas de velocidade

Anteriormente obteve-se as coordenadas cartesianas de posição pelas seguintes expressões:

$$x = r \cos f = a (\cos u - e), \quad (4.76)$$

$$y = r \operatorname{sen} f = a \operatorname{sen} u (1 - e^2)^{1/2}, \quad (4.77)$$

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos f} = a (1 - e \cos u) . \quad (4.78)$$

Para se obter as coordenadas de velocidade, basta derivá-las em relação ao tempo:

$$\dot{x} = -a \operatorname{sen} u \dot{u} , \quad (4.79)$$

$$\dot{y} = a \cos u (1 - e^2)^{1/2} \dot{u} , \quad (4.80)$$

$$v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 . \quad (4.81)$$

A variação temporal da anomalia excêntrica \dot{u} pode ser obtida a partir da equação de Kepler:

$$M = n(t - T) = u - e \operatorname{sen} u . \quad (4.82)$$

Derivando-se em relação ao tempo, obtém-se:

$$n = \dot{u} (1 - e \cos u) , \quad (4.83)$$

donde se conclui que:

$$\dot{u} = \frac{n}{1 - e \cos u} . \quad (4.84)$$

Lembrando que $r / a = 1 - e \cos u$, vem:

$$\dot{u} = \frac{na}{r} , \quad (4.85)$$

$$\dot{x} = -\frac{na^2}{r} \operatorname{sen} u , \quad (4.86)$$

$$\dot{y} = \frac{na^2}{r} \cos u (1 - e^2)^{1/2} . \quad (4.87)$$

4.4 Órbita circular

Uma órbita circular é um caso particular da órbita elíptica. Na órbita circular a excentricidade é nula, e, como consequência, não há como identificar o perigeu. Impondo a condição de que a excentricidade seja nula na equação de Kepler, percebe-se que a anomalia média coincide com a anomalia excêntrica em órbitas circulares, isto é, $M = u$. Da mesma forma, a Equação 4.61 mostra que a anomalia excêntrica fica igual à anomalia verdadeira nesta órbita, e assim $M = u = f$. A Equação 4.55 indica, por sua vez, que na órbita circular o raio r é constante e igual ao semi-eixo maior a em qualquer local dela.

A velocidade, calculada por meio da equação da vis-viva (Equação 4.48), resulta, na órbita circular, um valor também constante que independe da posição:

$$v = \sqrt{\frac{\mu}{a}} . \quad (4.88)$$

Decorre disto que a força gravitacional é também constante em toda a órbita e perpendicular à velocidade.

Investiga-se agora a relação entre o módulo da velocidade em órbitas que se tocam no perigeu ou no apogeu, como mostrado na Figura 4.3. As órbitas H e L são circulares, enquanto que E é uma órbita elíptica cujo raio do perigeu coincide com o raio da órbita baixa L e cujo raio do apogeu é igual ao raio da órbita alta H . Da equação da vis-viva tira-se que as velocidades no perigeu e apogeu da órbita elíptica são dadas respectivamente por:

$$v_p = \sqrt{\frac{\mu}{a_e}} \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \quad (4.89)$$

e

$$v_a = \sqrt{\frac{\mu}{a_e}} \sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \quad (4.90)$$

Por outro lado, da imposição dos pontos de contacto na órbita, tira-se que $a_h = r_a = a_e(1 + e)$. Igualmente, $a_l = r_p = a_e(1 - e)$, de onde tem-se: $a_l < a_e < a_h$.

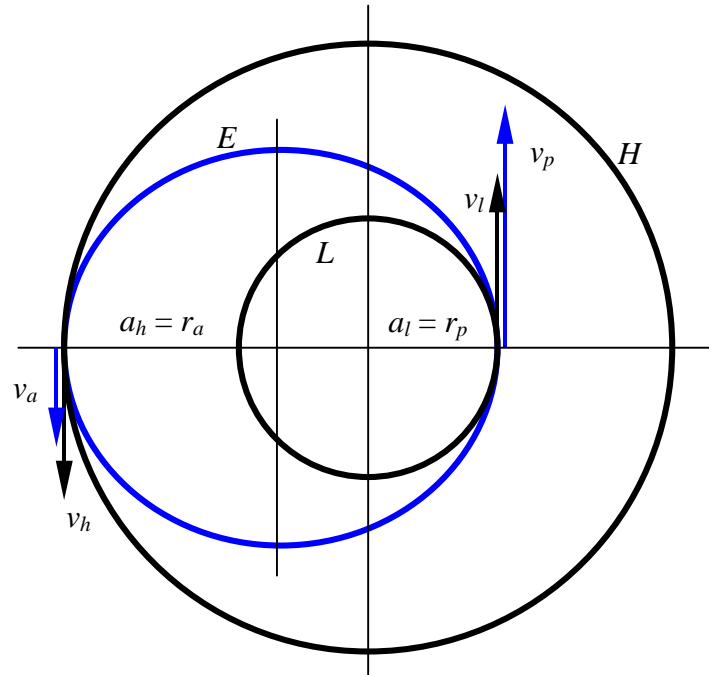


Figura 4.3 – Geometria com três órbitas co-planares.

Com base na expressão da velocidade para a órbita circular, as velocidades nas órbitas L e H em função dos elementos da órbita elíptica ficam, respectivamente:

$$v_l = \sqrt{\frac{\mu}{a_e}} \sqrt{\frac{1}{1-e}} \quad (4.91)$$

e

$$v_h = \sqrt{\frac{\mu}{a_e}} \sqrt{\frac{1}{1+e}} \quad (4.92)$$

Por meio destas expressões percebe-se que a velocidade no perigeu v_p é a maior delas. A velocidade na órbita L pode ser posta em função da velocidade no perigeu, resultando:

$$v_l = \frac{v_p}{\sqrt{1+e}} < v_p \quad (4.93)$$

Faz-se agora o mesmo procedimento, e calcula-se a velocidade da órbita H em função de v_l :

$$v_h = v_l \sqrt{\frac{1-e}{1+e}} < v_l, \quad (4.94)$$

e a velocidade no apogeu em função da velocidade v_h :

$$v_a = v_h \sqrt{1-e} < v_h \quad (4.95)$$

Percebe-se que as relações envolvendo a excentricidade no segundo membro são todas menores do que a unidade, o que leva à seguinte desigualdade: $v_a < v_h < v_l < v_p$. Isto mostra que para transferir um satélite de uma órbita mais baixa L para uma órbita mais alta H deve-se impulsioná-lo de forma a transformar a órbita circular inicial numa órbita elíptica, e, em seguida, aumentar novamente a velocidade no apogeu de forma a transformar a órbita elíptica em circular. Apesar destes dois impulsos a órbita final tem velocidade menor do que a órbita inicial, pois $v_a < v_l$.

4.5 Exercícios

1. Demonstrar a equação da "vis-viva" $v^2 = \mu(2/r - 1/a)$, a partir das coordenadas de velocidade do movimento plano em termos da anomalia excêntrica:

$$\dot{x} = -\frac{na^2}{r} \operatorname{sen} u,$$

$$\dot{y} = \frac{na^2}{r} \cos u (1-e^2)^{1/2}.$$

2. Dados $\mu = 3,986 \times 10^5 \text{ Km}^3/\text{s}^2$, P (período da órbita) = 7000 seg., e (excentricidade) = 0,08, e T (tempo de passagem pelo perigeu) = 1987-fev-12 00:00:00 horas,
 - a) calcular as coordenadas de posição e velocidade no plano orbital para o instante $t = 1987\text{-fev-12 } 00:30:00$ horas;
 - b) achar as anomalias excêntrica, verdadeira e média;
 - c) fazer um esboço da elipse e dos ângulos envolvidos.
3. Dada a anomalia excêntrica $\pi/2$ às 07h57min, quando foi a última passagem pelo perigeu de um satélite com semi-eixo maior de $4R_t$ (raios terrestres) e excentricidade de $\pi/4\sqrt{2}$? (Dados $R_t=6378 \text{ Km}$ e $\mu = 3,986 \times 10^5 \text{ Km}^3/\text{s}^2$)
4. Um satélite é lançado no perigeu com altura de 622 Km sobre a Terra ($R_t = 6378 \text{ Km}$), e cujo apogeu atinge 3622 Km de altura. Determine:
 - a) a constante da velocidade areolar;
 - b) a velocidade no apogeu;
 - c) o período da órbita.

5. Se a anomalia excêntrica de uma órbita geocêntrica desconhecida é 30° , e 20 minutos após é 60° , quais são a excentricidade e o semi-eixo maior se em outros 20 minutos a anomalia excêntrica é de 90° ? ($\mu = 3,986 \times 10^5 \text{ Km}^3/\text{s}^2$)
6. Um satélite tem sua órbita com excentricidade 0,3 e altura do perigeu de 380 Km. Determinar a altura do apogeu, a energia total, o momento angular específico e o período. (Raio da Terra = 6378 Km, $\mu = 3,986 \times 10^5 \text{ Km}^3/\text{s}^2$)
7. Calcule os incrementos de velocidades necessários para transformar uma órbita circular a 200 km de altura numa órbita também circular a 36000 km de altura. Admita que estes incrementos ocorram rapidamente, e considere o Raio da Terra = 6378 Km e $\mu = 3,986 \times 10^5 \text{ Km}^3/\text{s}^2$

5 POSICIONAMENTO DE SATÉLITES - PROBLEMA DIRETO

O movimento plano orbital, ou seja, o movimento no plano da órbita já foi discutido no capítulo anterior. Passa-se agora a analisar o movimento do satélite no espaço, em relação à Terra.

5.1 Elementos keplerianos

Os elementos keplerianos ou clássicos constituem coordenadas que posicionam completamente o satélite e sua órbita. No movimento plano, foram definidos 3 dos elementos keplerianos:

- o semi-eixo maior a ,
- a excentricidade e , e
- a anomalia média M ,

que definem a elipse e localizam o satélite no plano da elipse.

Entretanto, para se definir completamente a órbita necessita-se localizá-la espacialmente. Para tanto se deve definir os chamados ângulos de Euler da órbita, que recebem nomes bastante específicos. Assim, seja o sistema $OXYZ$ centrado no centro da Terra e cujo plano fundamental OXY é o plano do Equador. O eixo OX aponta para o chamado ponto vernal γ , e o sistema $OXYZ$ é portanto considerado inercial.

Pela Figura 5.1, pode-se definir alguns pontos notáveis da geometria orbital:

- Ω é o nodo ascendente, ponto onde a órbita cruza o plano do Equador, a partir do hemisfério sul para o norte,
- Π é o perigeu, ponto da elipse mais próximo do foco, centro da Terra.

Pela mesma figura pode-se notar os ângulos de Euler i , Ω , ω , denominados:

- i : é a inclinação da órbita em relação ao Equador, $0^\circ \leq i \leq 180^\circ$,
- Ω : é ascensão reta do nodo ascendente, ângulo entre a origem do eixo OX e $O\Omega$, $0^\circ \leq \Omega \leq 360^\circ$, e
- ω : é o argumento do perigeu, ângulo entre OX e $O\Pi$, $0^\circ \leq \omega \leq 360^\circ$.

Nota-se que ω e f são ângulos medidos no plano da elipse orbital, ao passo que Ω é medido no plano do Equador. Os elementos a , e , i , Ω , ω , e M definem a órbita no espaço, e são chamados de elementos keplerianos.

5.2 Transformação de coordenadas

O problema aqui é o de se obter as coordenadas cartesianas X, Y, Z , \dot{X} , \dot{Y} , e \dot{Z} , a partir dos elementos keplerianos. Inicialmente, deve-se calcular as coordenadas no plano orbital Oxy , conforme visto no capítulo anterior. Recapitulando:

$$x = a (\cos u - e), \quad (5.1)$$

$$y = a \operatorname{sen} u (1 - e^2)^{1/2}, \quad (5.2)$$

$$z = 0, \quad (5.3)$$

$$\dot{x} = -\frac{na^2}{r} \operatorname{sen} u, \quad (5.4)$$

$$\dot{y} = \frac{na^2}{r} \cos u (1 - e^2)^{1/2}, \quad (5.5)$$

$$\dot{z} = 0, \quad (5.6)$$

onde $z = \dot{z} = 0$ espelha o fato do movimento se dar no plano orbital.

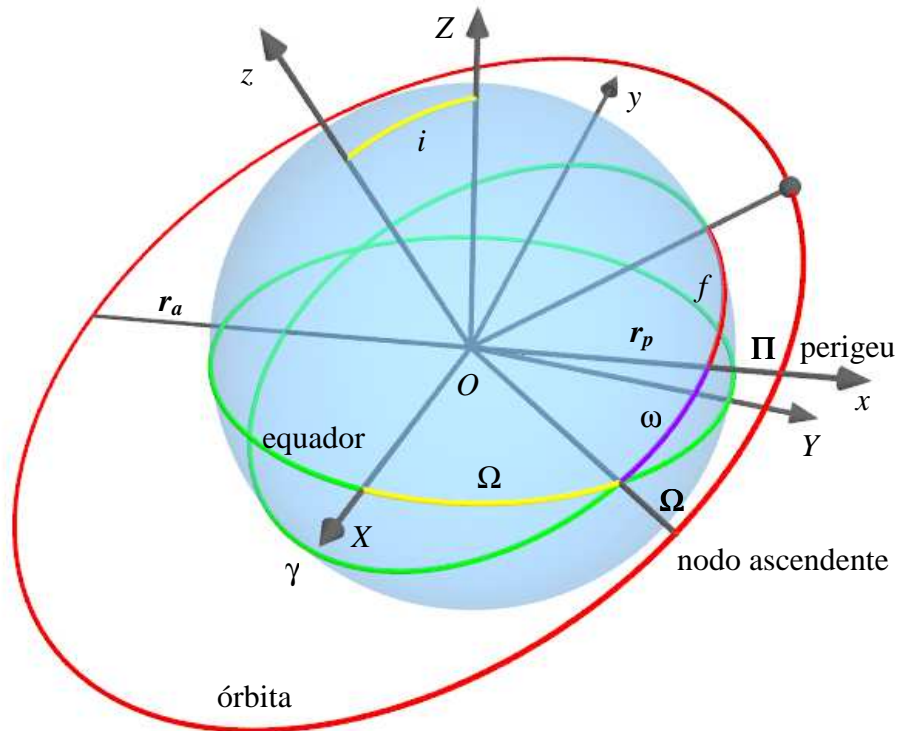


Figura 5.1 - Geometria para definição dos elementos orbitais

Dados os ângulos de Euler da órbita i , Ω , e ω , existe uma matriz de rotação \mathbf{R} , função desses ângulos, que produz a transformação:

$$\mathbf{X} = \mathbf{R}(i, \Omega, \omega) \mathbf{x}, \quad (5.7)$$

onde $\mathbf{X} = (X \ Y \ Z)^T$, e $\mathbf{x} = (x \ y \ z)^T$. A transformação completa é realizada através de 3 rotações dos ângulos $-\Omega$, $-i$, e $-\omega$ em torno dos eixos instantâneos de rotação Z , X , e Z . Em outras palavras:

$$\mathbf{X} = \mathbf{R}_Z(-\Omega) \mathbf{R}_X(-i) \mathbf{R}_Z(-\omega) \mathbf{x}. \quad (5.8)$$

Lembrando que as matrizes de rotação $\mathbf{R}_z(\theta)$ e $\mathbf{R}_x(\theta)$ são definidas por:

$$\mathbf{R}_z(\theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & \text{sen } \theta & 0 \\ -\text{sen } \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (5.9)$$

$$\mathbf{R}_x(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \text{sen } \theta \\ 0 & -\text{sen } \theta & \cos \theta \end{bmatrix}, \quad (5.10)$$

chega-se a:

$$\mathbf{R}(i, \Omega, \omega) = cws \begin{bmatrix} c\Omega c\omega - s\Omega ci s\omega & -c\Omega s\omega - s\Omega ci c\omega & s\Omega si \\ s\Omega c\omega + c\Omega ci s\omega & -s\Omega s\omega + c\Omega ci c\omega & -c\Omega si \\ si s\omega & si c\omega & ci \end{bmatrix}, \quad (5.11)$$

onde $c \equiv \cos$, $s \equiv \text{sen}$, para simplificar a notação. Para se obter as componentes de velocidade utiliza-se a mesma matriz de rotação:

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{R}(i, \Omega, \omega) \dot{\mathbf{x}}, \quad (5.12)$$

onde $\dot{\mathbf{X}} = (\dot{X} \ \dot{Y} \ \dot{Z})^T$, e $\dot{\mathbf{x}} = (\dot{x} \ \dot{y} \ \dot{z})^T$.

5.3 Resumo da transformação

Dados os elementos keplerianos a , e , i , Ω , ω , e M , calcular o vetor de estado x , y , z , \dot{x} , \dot{y} e \dot{z} . Os seguintes passos de cálculo podem ser seguidos:

1. resolver a equação de Kepler $M = u - e \text{sen } u$ para se obter u ,
2. calcular o movimento médio n através de $n^2 a^3 = \mu$, e a distância geocêntrica r por meio de $r = a(1 - e \cos u)$.
3. calcular as coordenadas x , y , \dot{x} e \dot{y} do plano orbital via:

$$x = a(\cos u - e), \quad (5.13)$$

$$y = a \text{sen } u (1 - e^2)^{1/2}, \quad (5.14)$$

$$\dot{x} = -\frac{na^2}{r} \text{sen } u, \quad (5.15)$$

$$\dot{y} = \frac{na^2}{r} \cos u (1 - e^2)^{1/2}, \quad (5.16)$$

4. montar o vetor de estado no plano orbital com $\mathbf{x} = (x \ y \ 0)^T$ e $\dot{\mathbf{x}} = (\dot{x} \ \dot{y} \ 0)^T$

5. calcular a matriz de rotação $\mathbf{R}(i, \Omega, \omega)$,
6. calcular o vetor de estado \mathbf{X} e $\dot{\mathbf{X}}$ via:

$$\mathbf{X} = \mathbf{R}(i, \Omega, \omega) \mathbf{x}, \quad (5.17)$$

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{R}(i, \Omega, \omega) \dot{\mathbf{x}}. \quad (5.18)$$

5.4 Exercícios

1. Dados $R_t = 6378$ km, $\mu = 3,986 \times 10^5$ km³/s², $a = 1,5 R_t$, $e = 0,1$, $i = 30^\circ$, $\Omega = 45^\circ$, $\omega = 60^\circ$, e T (Tempo de passagem pelo perigeu) = 1962-jun-22 16:01:05 horas. Calcular o vetor de estado (X , Y , Z , \dot{X} , \dot{Y} , e \dot{Z}) no sistema geocêntrico para o instante 1962-jun-23 02:15:00 horas.

6 POSICIONAMENTO DE SATÉLITES-PROBLEMA INVERSO

Neste capítulo descrever-se-á o problema inverso do posicionamento de satélites. Isto é, dadas as coordenadas cartesianas (ou vetor de estado) $X, Y, Z, \dot{X}, \dot{Y},$ e \dot{Z} , calcular os elementos keplerianos da órbita $a, e, i, \Omega, \omega,$ e M .

6.1 Semi-eixo maior a

Inicialmente calcula-se os módulos do vetor posição e velocidade:

$$r^2 = X^2 + Y^2 + Z^2, \quad (6.1)$$

$$v^2 = \dot{X}^2 + \dot{Y}^2 + \dot{Z}^2. \quad (6.2)$$

e lembrando a equação da "vis-viva":

$$v^2 = \mu \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right), \quad (6.3)$$

chega-se a:

$$\frac{1}{a} = \frac{2}{r} - \frac{v^2}{\mu}. \quad (6.4)$$

6.2 Excentricidade e

Lembrando a equação do raio vetor:

$$r = a(1 - e \cos u), \quad (6.5)$$

vem que $e \cos u = 1 - r/a$. Derivando-se em relação ao tempo obtém-se:

$$-e \sin u \dot{u} = -\dot{r}/a. \quad (6.6)$$

Como $\dot{u} = \frac{na}{r}$ vêm

$$e \sin u = \frac{r \dot{r}}{na^2}. \quad (6.7)$$

O termo $r \dot{r}$ pode ser calculado a partir de um simples truque. Calcula-se:

$$\mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{r}} = X\dot{X} + Y\dot{Y} + Z\dot{Z}, \quad (6.8)$$

e lembrando que $\mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{r}} = r v \cos \theta$, onde $v \cos \theta$ é a velocidade radial, ou seja, \dot{r} , tem-se:

$$r \dot{r} = \mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{r}} = X\dot{X} + Y\dot{Y} + Z\dot{Z}, \quad (6.9)$$

Portanto, tem-se as seguintes relações:

$$e \sin u = \frac{r \dot{r}}{na^2}, \quad (6.10)$$

$$e \cos u = 1 - \frac{r}{a} \quad (6.11)$$

Agora, a excentricidade e pode ser obtida quadrando-se e somando-se as Equações 6.10 e 6.11:

$$e = \left[\left(\frac{r \dot{r}}{na^2} \right)^2 + \left(1 - \frac{r}{a} \right)^2 \right]^{1/2}. \quad (6.12)$$

A anomalia excêntrica u pode ser obtida dividindo-se membro a membro as Equações 6.10 e 6.11:

$$\tan u = \frac{(r \dot{r}) / (na^2)}{1 - r/a}, \quad (6.13)$$

e realizando análise de quadrante para definir o ângulo u .

Outra maneira de se calcular a excentricidade é a partir da expressão do "semi-latus rectum":

$$p = a(1 - e^2) \quad (6.14)$$

onde $e^2 = 1 - p/a$. Como $p = h^2 / \mu$, e h pode ser calculado pelo produto vetorial $h = |\mathbf{r} \times \mathbf{v}|$ vem:

$$e = \sqrt{1 - \frac{h^2}{\mu a}}. \quad (6.15)$$

Esta expressão, apesar de simples, não é frequentemente utilizada pois produz erros numéricos quando $e \rightarrow 0$. Por exemplo, o termo dentro da raiz quadrada pode se tornar negativo.

6.3 Anomalia média M

A anomalia média é obtida facilmente através da equação de Kepler:

$$M = u - e \sin u. \quad (6.16)$$

Se a excentricidade foi obtida através da expressão $e = \left[1 - h^2 / \mu a \right]^{1/2}$, então deve-se achar u de outra maneira. Por exemplo, achar a anomalia verdadeira f , e depois utilizar a relação:

$$\tan^2(f/2) = \frac{1+e}{1-e} \tan^2(u/2). \quad (6.17)$$

6.4 Inclinação i

A inclinação da órbita pode ser obtida com o cálculo do momento angular específico h :

$$\begin{aligned} \mathbf{h} &= \mathbf{r} \times \mathbf{v}, \\ &= \begin{vmatrix} \hat{X} & \hat{Y} & \hat{Z} \\ \dot{X} & \dot{Y} & \dot{Z} \\ \hat{I} & \hat{J} & \hat{K} \end{vmatrix}, \\ &= (Y\dot{Z} - Z\dot{Y})\hat{I} + (Z\dot{X} - X\dot{Z})\hat{J} + (X\dot{Y} - Y\dot{X})\hat{K}, \\ &= h_x\hat{I} + h_y\hat{J} + h_z\hat{K}, \\ h &= \sqrt{h_x^2 + h_y^2 + h_z^2}, \end{aligned} \quad (6.18)$$

$$h = \sqrt{h_x^2 + h_y^2 + h_z^2}, \quad (6.19)$$

onde $\hat{I}, \hat{J}, \hat{K}$ são os versores nas direções X, Y e Z , e h_x, h_y , e h_z são as componentes do momento angular nas mesmas direções. Pela Figura 6.1 nota-se que o vetor momento angular, que é perpendicular ao plano da órbita, forma o ângulo i com o eixo Z . Portanto:

$$\cos i = h_z / h, \quad (6.20)$$

com $0^\circ \leq i \leq 180^\circ$.

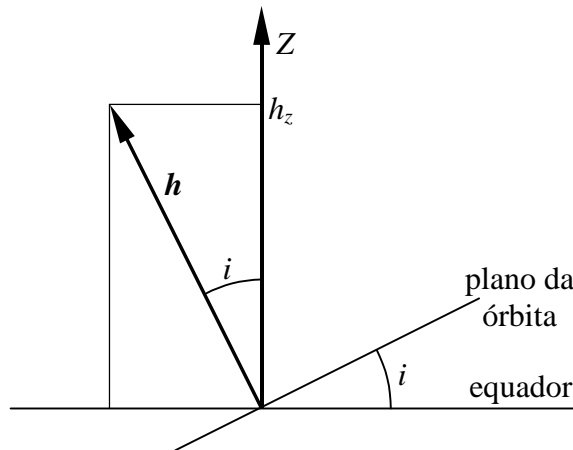


Figura 6.1 - Vetor momento angular

6.5 Ascensão reta do nodo ascendente Ω

A melhor maneira de calcular Ω é por meio da definição de um vetor Ω , com origem no centro O e passando pela linha dos nodos, conforme mostra a Figura 6.2.

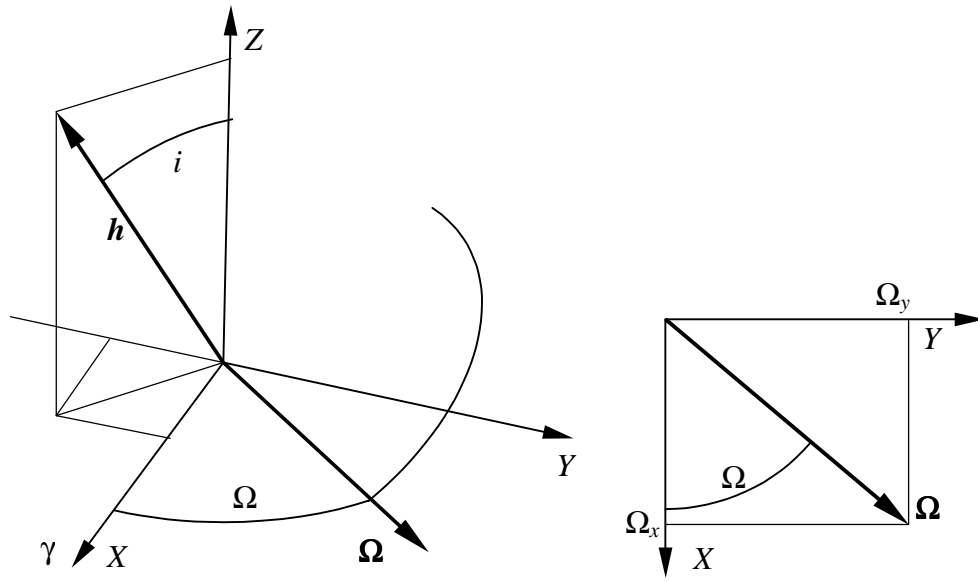


Figura 6.2 - vetor Ω

Como o momento angular \mathbf{h} é perpendicular ao plano da órbita, ele também é perpendicular ao vetor Ω que está contido no plano da órbita. Assim, pode-se escrever:

$$\Omega = \hat{K} \times \mathbf{h}, \quad (6.21)$$

onde \hat{K} é o versor no eixo Z. Daí, têm-se que:

$$\begin{aligned} \Omega &= \begin{vmatrix} \hat{I} & \hat{J} & \hat{K} \\ 0 & 0 & 1 \\ h_x & h_y & h_z \end{vmatrix}, \\ &= -h_y \hat{I} + h_x \hat{J}. \end{aligned} \quad (6.22)$$

Pela mesma Figura 6.2, tira-se que:

$$\tan \Omega = \frac{\Omega_y}{\Omega_x} = \frac{h_x}{-h_y}, \quad (6.23)$$

onde Ω_x e Ω_y são as componentes do vetor Ω nas direções X e Y. O sinal negativo em $-h_y$ foi mantido no denominador para enfatizar o sinal do co-seno para fins de análise de quadrante no cálculo de Ω .

6.6 Argumento do perigeu ω

O cálculo do ângulo ω denominado argumento do perigeu, requer a definição de um ângulo auxiliar υ chamado de longitude verdadeira. A longitude verdadeira é simplesmente a soma do argumento do perigeu com a anomalia verdadeira:

$$v = \omega + f. \quad (6.24)$$

A anomalia verdadeira f pode ser obtida através das expressões para as coordenadas x e y do plano orbital:

$$x = r \cos f = a (\cos u - e), \quad (6.25)$$

$$y = r \sin f = a \sin u (1 - e^2)^{1/2}. \quad (6.26)$$

Calcula-se a tangente via:

$$\tan f = \frac{\sin u (1 - e^2)^{1/2}}{\cos u - e}, \quad (6.27)$$

onde u foi calculado na Equação 6.13. Em seguida, deve-se analisar corretamente os quadrantes para se obter o ângulo f .

A Figura 6.3 mostra os ângulos envolvidos. Nota-se que com duas rotações, pode-se transformar coordenadas referidas ao sistema $OXYZ$ até o ponto onde se localiza o satélite.

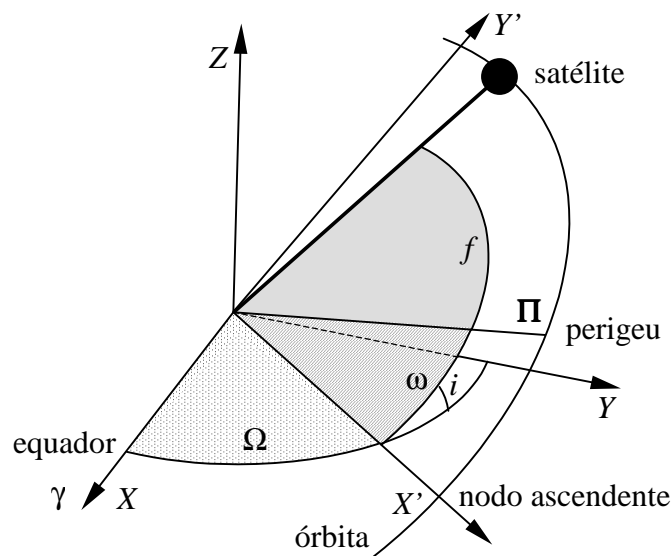


Figura 6.3 - Longitude verdadeira

Assim, as coordenadas correspondentes a $OX'Y'$, onde X' aponta para o nodo e Y' está no plano orbital, a 90° de X' , podem ser obtidas via:

$$\mathbf{X}' = \mathbf{R}_x(i) \mathbf{R}_z(\Omega) \mathbf{X}, \quad (6.28)$$

Porém, as coordenadas do satélite no sistema $OX'Y'Z'$ são facilmente calculadas por

$$\begin{aligned}
X' &= r \cos \nu = r \cos(\omega + f), \\
Y' &= r \sin \nu = r \sin(\omega + f), \\
Z' &= 0.
\end{aligned} \tag{6.29}$$

Explicitando essa transformação vem:

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} r \cos \nu \\ r \sin \nu \\ 0 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos i & \sin i \\ 0 & \sin i & \cos i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \Omega & \sin \Omega & 0 \\ -\sin \Omega & \cos \Omega & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}, \\
&= \begin{bmatrix} \cos \Omega & \sin \Omega & 0 \\ -\cos i \sin \Omega & \cos i \cos \Omega & \sin i \\ \sin i \sin \Omega & -\sin i \cos \Omega & \cos i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}.
\end{aligned} \tag{6.30}$$

e portanto:

$$r \cos \nu = \cos \Omega X + \sin \Omega Y, \tag{6.31}$$

$$r \sin \nu = -\cos i \sin \Omega X + \cos i \cos \Omega Y + \sin i Z, \tag{6.32}$$

donde,

$$\tan \nu = \frac{-\cos i \sin \Omega X + \cos i \cos \Omega Y + \sin i Z}{\cos \Omega X + \sin \Omega Y}. \tag{6.33}$$

Finalmente, o argumento do perigeu é calculado por:

$$\omega = \nu - f. \tag{6.34}$$

6.7 Exercícios

1. Dados $R_t = 6378$ Km, $\mu = 3,986 \times 10^5$ Km³/s², $X = 1R_t$, $Y = 2R_t$, $Z = 3R_t$, $\dot{X} = 0,5$ km/s, $\dot{Y} = 1,5$ km/s, e $\dot{Z} = 2$ km/s no sistema geocêntrico, calcular os elementos keplerianos correspondentes 2 horas mais tarde.

7 SISTEMAS DE COORDENADAS CELESTES

Sabe-se que as posições na superfície da Terra são completamente especificadas com referência ao meridiano de Greenwich e ao Equador. A especificação das posições na esfera celeste é um processo similar e existem vários métodos para fazer isso dependendo dos círculos maiores escolhidos como círculos principais. O sistema é definido de acordo com o centro de coordenadas ou a origem da referência escolhida: topocêntrico, se o centro estiver na superfície terrestre; geocêntrico, se o centro coincidir com o centro da Terra; heliocêntrico, se o centro de coordenadas coincidir com a posição do Sol; planetocêntrico, se a origem estiver coincidindo com a posição de um planeta escolhido; baricêntrico se a origem estiver no centro de massa de um sistema de corpos, etc.

Define-se um “círculo maior” como a circunferência obtida pela interseção de um plano com a superfície de uma esfera, e tal que o plano contenha o centro da esfera. Um “círculo menor” é também obtido pela interseção do plano com a esfera, porém neste caso o plano não contém o centro da esfera.

7.1 Sistemas principais

Existem quatro sistemas principais para especificar as posições de corpos celestes na esfera celeste.

7.1.1 Sistema horizontal (topocêntrico)

Referindo-se a Figura 7.1, seja O' um observador na superfície da Terra e Z , o zênite, que é definido por um ponto na esfera celeste verticalmente em cima do observador. Isto é, $O'Z$ é a continuação da reta que liga o centro da Terra ao ponto O' . O plano perpendicular a $O'Z$, e que corta a esfera celeste no círculo maior NOS, é chamado horizonte celeste ou simplesmente horizonte.

Seja X a posição de um corpo celeste. O círculo maior passando através dos pontos Z , X e X' é chamado um círculo vertical.

No plano de ZXX' , o ângulo $XO'X'$ ou o arco $X'X$ é denominado *elevação* (ou altitude), h , de X .

Agora,

$$\begin{aligned} ZX &= ZX' - X'X \quad , \\ &= 90^\circ - h \quad , \end{aligned} \tag{7.1}$$

é chamada distância do zênite.

Seja KXM um círculo menor paralelo ao horizonte. Então, todos os corpos celestes, cujas posições ficam no círculo menor KXM num certo instante têm a mesma elevação e a mesma distância do zênite. Portanto, para definir a posição do corpo em questão completamente, precisa-se especificar o círculo vertical sobre o qual ele está situado.

Seja $O'P$ paralelo ao eixo da rotação da Terra. Quando a latitude do observador é norte, a posição P é chamada pólo celestial norte ou simplesmente pólo norte. A posição de Polaris, a estrela do pólo norte, é aproximadamente dada pela direção de $O'P$.

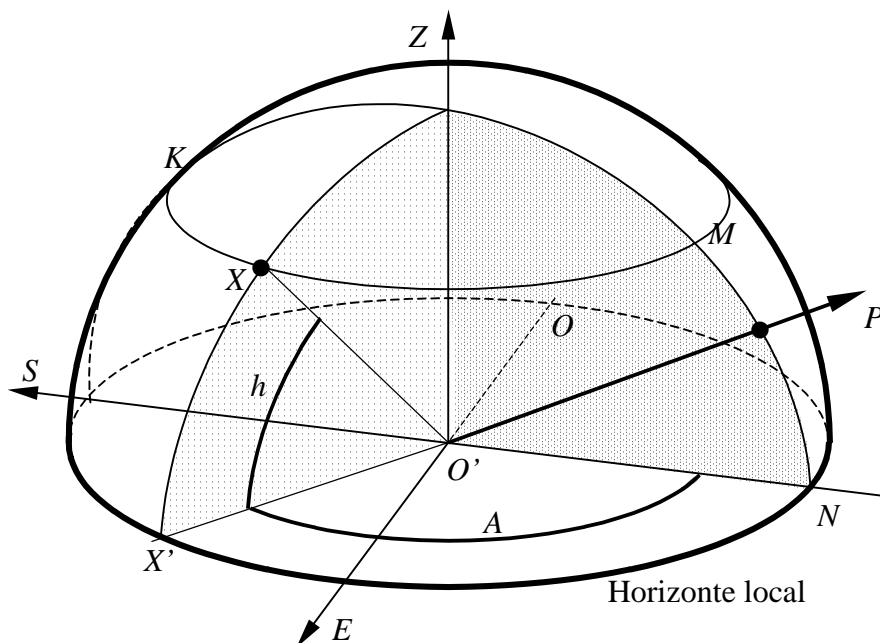


Figura 7.1 - Sistema horizontal

O círculo vertical através dos pontos Z , P e N é definido como círculo vertical principal e o ponto N como ponto norte do horizonte. O ponto S , exatamente oposto a N , é o ponto sul, e o ponto O , o ponto oeste. Conseqüentemente, pode-se definir a segunda coordenada para especificar a posição do corpo celeste X num dado momento em relação ao círculo vertical principal.

O ângulo $NO'X'$ ou o arco NX' é chamado *azimute*, A , do X . Se X estiver na parte oeste da esfera celeste, como mostrado na Figura 7.1, o azimute é denominado azimute (O) e, se não, azimute (E).

Assim, num dado instante, a posição de um corpo celeste na esfera celeste é completamente especificada em relação ao horizonte e ao ponto norte do horizonte em termos de elevação e azimute (O ou E), ou distância de zênite e azimute.

Uma outra maneira de medir o azimute é no sistema *NESO* (Norte-Este-Sul-Oeste), onde o azimute varia entre 0° e 360° e é medido a partir do ponto N na direção leste.

Resumindo, as características do sistema horizontal são apresentadas na Tabela 7.1.

Devido ao movimento de rotação da Terra, a elevação e o azimute de um corpo celeste (uma estrela, por exemplo) variam com o tempo.

Tabela 7.1 – Definição do sistema de coordenadas horizontal.

Plano fundamental	- Horizonte
Origem das abscissas	- Ponto norte
Sentido	- Retrógrado
Abscissa	- Azimute, A (0° a 360° NESO, ou 0° a $\pm 180^\circ$ E ou O)
Ordenada	- Elevação, h (0° a $\pm 90^\circ$)

7.1.2 Sistema horário (topocêntrico ou geocêntrico)

Com referência à Figura 7.2, seja O' a posição de um observador na latitude ϕ , Z o zênite e P o pólo norte. O círculo maior ROT cujo plano é perpendicular a $O'P$ é denominado equador celeste, cujo plano é paralelo ao equador terrestre. Neste caso, o sistema é chamado topocêntrico. Se a origem deste sistema coincidir com o centro de massa da Terra, o plano do equador celeste seria simplesmente a projeção do equador terrestre na esfera celeste e o sistema é denominado geocêntrico. Observa-se que o equador celeste e o horizonte se interceptam em dois pontos, O e E .

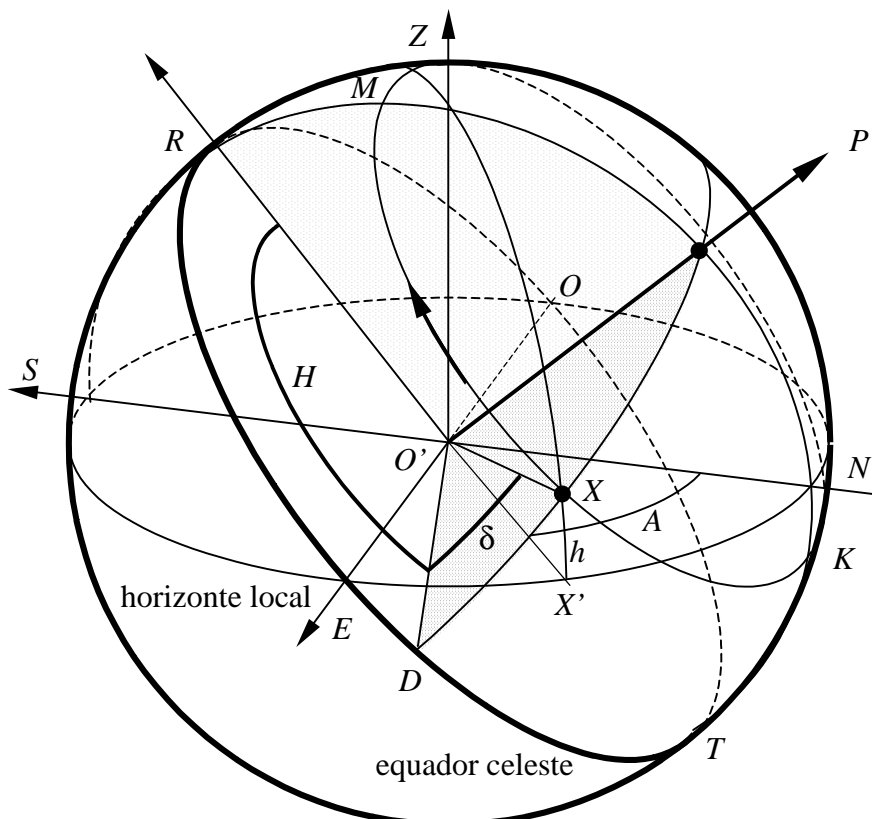


Figura 7.2 - Sistema horário

Devido à rotação da Terra, um corpo celeste X descreve um círculo menor MXK na esfera celeste. Seja $PXDQ$ o semi-círculo maior através de X e dos pólos da esfera

celeste. Então o arco DX é denominado *declinação*, δ , de X . Se o corpo celeste estiver entre o equador celeste e o pólo norte, como mostrado na Figura 7.2, o arco DX é denominado declinação norte. Assim, a declinação é análoga à latitude terrestre.

Aqui, PX é denominado *distância polar norte*. A declinação para norte é positiva e para sul é negativa. Assim, em geral,

$$PX = 90^\circ - \delta \quad (7.2)$$

é válida para todos os corpos celestes.

Para fixar a posição do X completamente na esfera celeste, precisa-se de mais um círculo maior de referência. Este é o semi-círculo maior $PZRSQ$, que é denominado meridiano do observador. A quantidade que define a posição do X no paralelo da declinação MXK é o ângulo em P entre o meridiano do observador e o meridiano PXQ que passa através do X no momento. Este ângulo é chamado *ângulo horário*, e é dado por:

$$\begin{aligned} H &= \sphericalangle MPX \\ &= \sphericalangle ZPX \\ &= \text{arco } RD \end{aligned} \quad (7.3)$$

O ângulo horário é medido a partir do meridiano de observador para oeste, de 0° a 360° ou de 0h a 24h.

Como mostrado na Figura 7.2, quando o corpo celeste está no lado oeste do meridiano do observador, ou seja, quando o azimute é oeste, o ângulo horário fica entre 0° e 180° ou 0h e 12h. Da mesma maneira, se o corpo celeste está no lado leste do meridiano, o ângulo horário fica entre 12h e 24h.

Resumindo, as características do sistema são apresentadas na Tabela 7.2.

Tabela 7.2 – Definição do sistema de coordenadas horário

Plano fundamental	- Equador celeste
Origem das abscissas	- Ponto de interseção do meridiano do observador com o Equador celeste
Sentido	- Retrógrado
Abscissa	- Ângulo horário, H (0h a 24h ou $0h \pm 12h$ O ou E)
Ordenada	- Declinação, δ (0° a $\pm 90^\circ$ N ou S)

Neste sistema, a declinação de um corpo celeste permanece constante com o movimento de rotação diária da Terra, mas o ângulo horário varia durante o dia.

7.1.3 Sistema equatorial (geocêntrico)

Nos sistemas de coordenadas anteriores (no sistema horizontal e no sistema horário), a posição do observador foi tomada como o centro da esfera celeste.

Considera-se, agora, C , o centro da Terra como o centro da esfera celeste. Para os corpos celestes muito distantes, como no caso das estrelas, observa-se que esta mudança no centro não tem efeito nas definições dadas até agora.

No sistema de ângulo horário e declinação, em um dia, somente a declinação fica constante enquanto o ângulo horário fica variando de 0h a 24h. Mas, as posições de corpos celestes na esfera celeste são similares às posições de pontos fixos na superfície da Terra e portanto podem ser especificadas em relação a um ponto no equador.

Assim, referindo-se a Figura 7.3, seja γ um ponto no equador, fixo no espaço. Então, quando o corpo celeste X se move no espaço, o ponto γ também se move e a distância γD , que é chamada *ascensão reta*, mantém um valor constante. Aqui, o ponto γ escolhido como o ponto de referência, é chamado *equinócio vernal*.

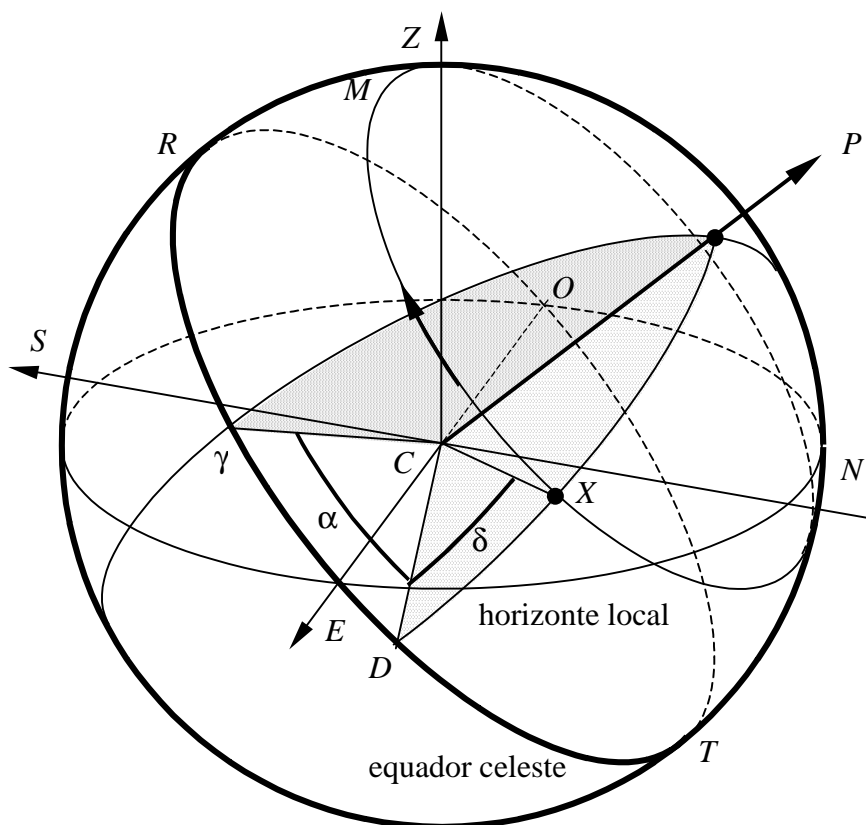


Figura 7.3 - Sistema equatorial

Portanto, no sistema equatorial, a posição de X é especificada pela declinação, δ , ou o arco DX , e a ascensão reta, α , ou o arco γD . A ascensão reta α é medida na direção

leste de 0h a 24h. Note-se que esta direção é oposta à direção de medida do ângulo horário.

Resumindo, as características do sistema são dadas na Tabela 7.3.

Tabela 7.3 – Características do sistema de coordenadas equatorial

Plano fundamental	-	Equador celeste
Origem das abscissas	-	Equinócio vernal
Sentido	-	Direto
Abscissa	-	Ascensão reta, α (0h a 24h)
Ordenada	-	Declinação geocêntrica, δ (0° a $\pm 90^\circ$ N ou S)

Este sistema apresenta o ângulo horário do ponto γ variando no tempo, mas ambos, a ascensão reta e a declinação de um corpo celeste permanecem fixos.

7.1.4 Sistema eclíptico

O plano orbital do movimento aparente do Sol é chamado plano da eclíptica. O ângulo entre o plano da eclíptica e o plano do equador celeste é chamado de obliquidade da eclíptica e é igual a $23,5^\circ$, aproximadamente. A posição de um corpo celeste pode ser referida também à eclíptica como círculo maior fundamental e ao equinócio vernal como ponto principal de referência.

Com referência à Figura 7.4, o arco γB , medido de γ a B ao longo da eclíptica na direção de movimento anual do Sol, i.e. na direção leste, é chamado *longitude celeste* λ , e é medido de 0° a 360° ao longo da eclíptica.

O arco BX é chamado *latitude celeste*, β .

Na Figura 7.4, observa-se que $\gamma D (= \alpha)$ é a ascensão reta do X e $XD (= \delta)$ é a declinação do X . Também pode-se ver que a partir dos valores conhecidos de ε (ângulo de obliquidade da eclíptica), α e δ podem-se achar os valores de λ e β .

Resumindo, as características do sistema eclíptico são mostradas na Tabela 7.4.

Tabela 7.4 – Definição do sistema de coordenadas eclíptico

Plano fundamental	-	Eclíptica
Origem das abscissas	-	Ponto (Equinócio) vernal
Sentido	-	Direto
Abscissa	-	Longitude celeste, λ
Ordenada	-	Latitude celeste β (0° a $\pm 90^\circ$ N ou S)

A latitude e a longitude celestes não são afetadas pela rotação diurna da Terra.

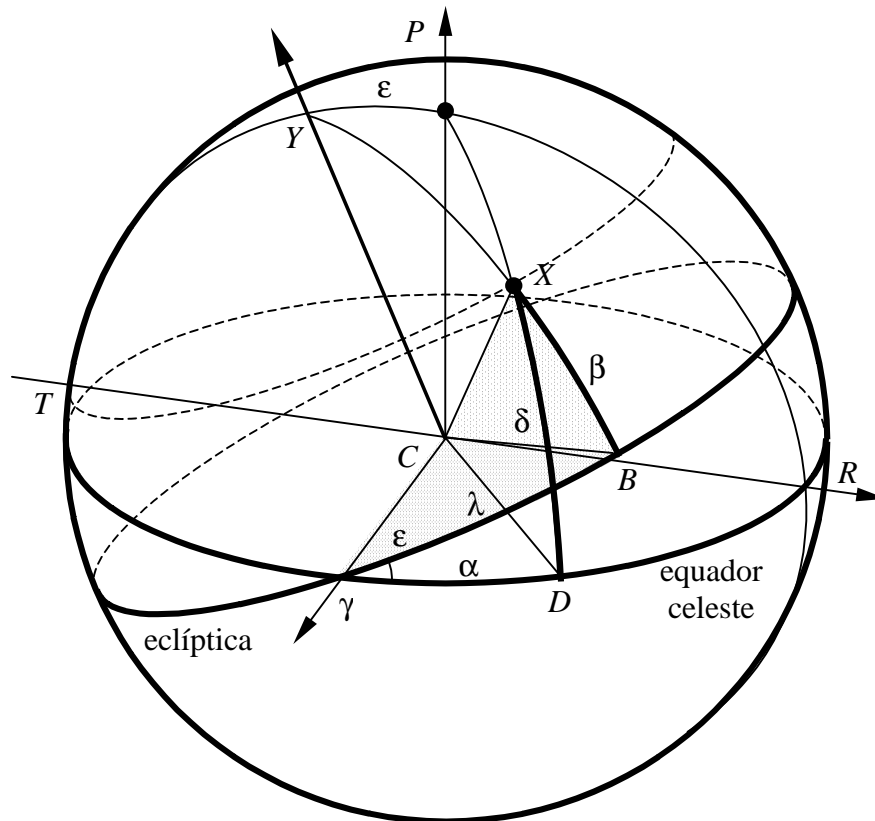


Figura 7.4 - Sistema eclíptico

7.2 Coordenadas cartesianas geocêntricas

Estes sistemas são apropriados para referir-se a pontos ligados à Terra. Aqui, existem dois tipos de sistemas: (i) sistema cartesiano terrestre, sujeito ao movimento de rotação da Terra e (ii) sistema cartesiano celeste, independente da rotação terrestre.

7.2.1 Sistema cartesiano terrestre

Como mostrado na Figura 7.5, a origem do sistema cartesiano terrestre é o centro de gravidade da Terra e o eixo Z está apontado para o pólo norte. O eixo X deste sistema está direcionado ao ponto de interseção entre o meridiano de Greenwich e o equador e o eixo Y está a 90° do eixo X no sentido direto.

As coordenadas cartesianas de um ponto no espaço podem também ser representadas por meio dos ângulos: longitude terrestre λ e latitude geocêntrica ϕ . Se este ponto estiver fixo com relação à Terra, então estes ângulos não variam com o tempo.

7.2.2 Sistema cartesiano celeste

Como mostrado na Figura 7.6, a origem do sistema cartesiano celeste é o centro de gravidade da Terra e o eixo Z está apontado para o pólo norte celeste. O eixo X deste

sistema está direcionado ao ponto vernal e o eixo Y está a 90° do eixo X no sentido direto.

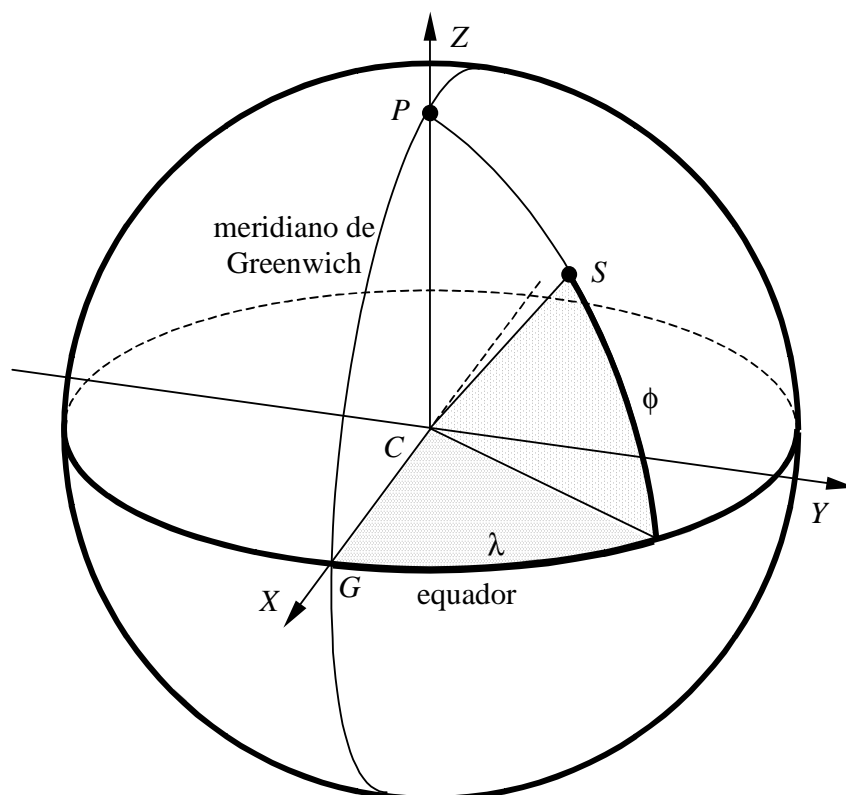


Figura 7.5 - Sistema cartesiano terrestre

7.3 Coordenadas cartesianas topocêntricas

Aqui existem dois sistemas, um relacionado ao geóide e outro relacionado ao elipsóide. Geóide é definido como a superfície dos oceanos que é uma superfície equipotencial do campo de gravidade terrestre verdadeiro. Elipsóide é definido como um elipsóide de revolução que é uma superfície equipotencial do campo normal de gravidade. Ambos possuem a aparência de uma esfera achatada nos pólos.

7.3.1 Sistema topocêntrico astronômico

Como mostrado na Figura 7.7, a origem do sistema topocêntrico astronômico é a estação de observação. O eixo $C'S_3$ está direcionado à vertical, que é perpendicular ao geóide. O eixo $C'S_1$ é tangente ao meridiano da estação, orientado para o sul e o eixo $C'S_2$ está a 90° do eixo $C'S_1$ para definir um sistema inverso.

7.3.2 Sistema topocêntrico geodésico

Como mostrado na Figura 7.7, a origem do sistema topocêntrico geodésico é a estação de observação. O eixo $C'S_3$ está direcionado à normal, que é perpendicular ao elipsóide. O eixo $C'S_1$ é tangente ao meridiano da estação, orientado para o sul e o eixo $C'S_2$ está a 90° do eixo $C'S_1$ para definir um sistema inverso.

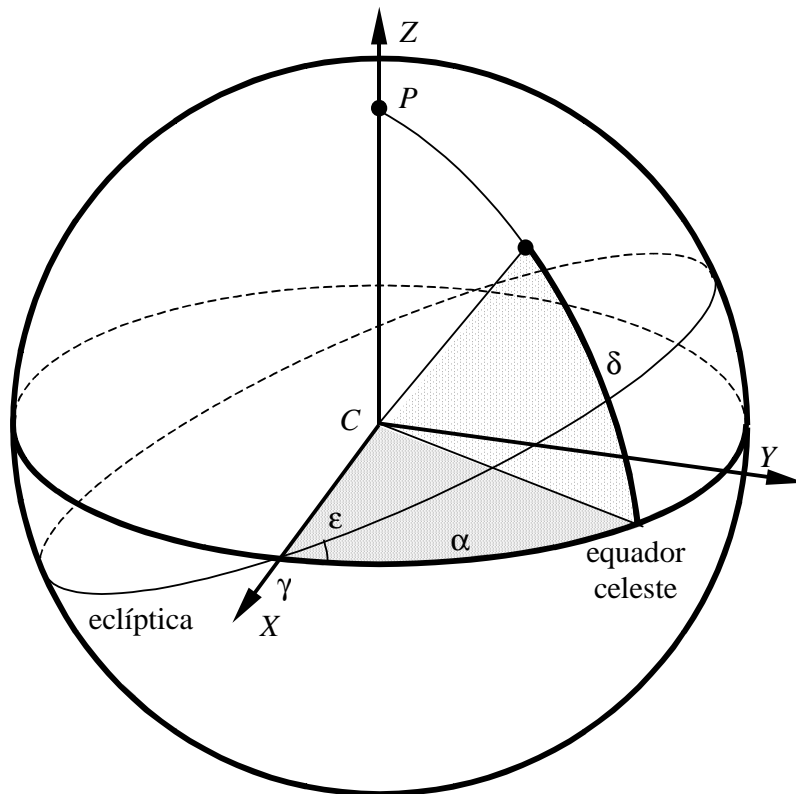


Figura 7.6 - Sistema cartesiano celeste

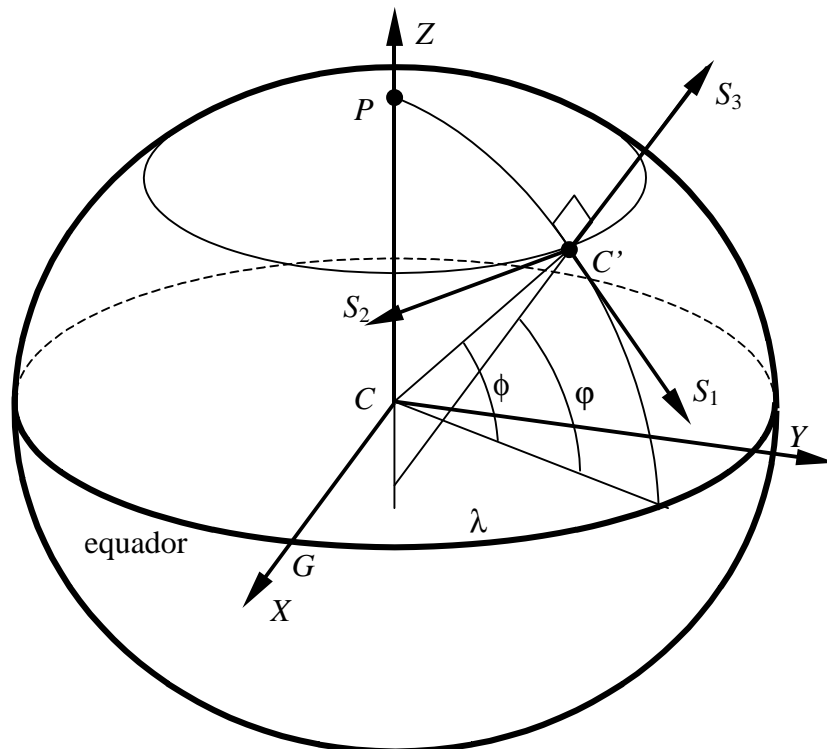


Figura 7.7 - Sistema topocêntrico

7.4 Movimento aparente do Sol

A Figura 7.8 mostra o movimento aparente do Sol ao redor da Terra. Este plano de movimento aparente do Sol, que é chamada eclíptica, está inclinada em $23,5^\circ$ em relação ao plano equatorial da Terra. Esta inclinação causa as mudanças na atmosfera terrestre, que são definidas em termos das estações. O começo das estações no hemisfério norte e no hemisfério sul são apresentadas na Tabela 7.5.

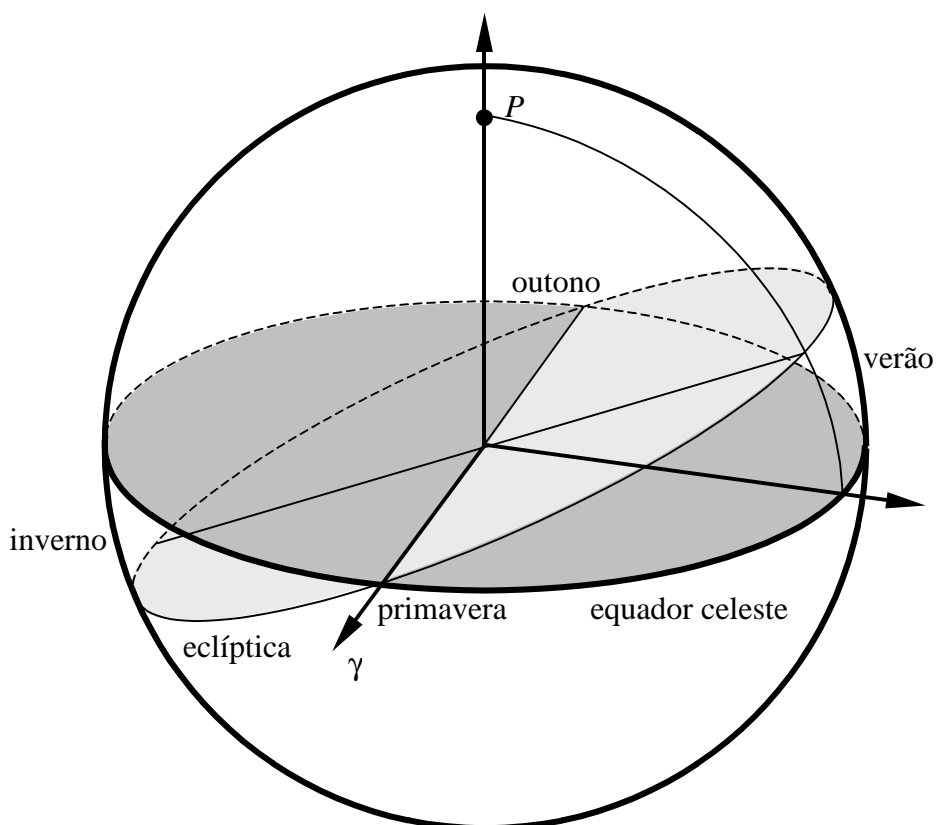


Figura 7.8 - Movimento aparente do Sol

Tabela 7.5 – Datas aproximadas do início das estações

Início	Hemisfério Norte	Hemisfério Sul
≈21/03	Primavera	Outono
≈22/06	Verão	Inverno
≈23/09	Outono	Primavera
≈22/12	Inverno	Verão

7.5 Exercícios

1. Referindo-se à figura do sistema horizontal, provar que a elevação do pólo é igual à latitude do observador.

2. A figura do sistema horário se refere a um observador no hemisfério norte. Desenhar a figura correspondente para um observador do hemisfério sul.
3. Considerando o sistema equatorial, achar a relação entre o ângulo horário do ponto vernal e a ascensão reta do corpo celeste.
4. Num triângulo esférico ABC , sabe-se que:
 - $\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A$ (Fórmula de co-seno)
 - $\frac{\sin A}{\sin a} = \frac{\sin B}{\sin b} = \frac{\sin C}{\sin c}$ (Fórmula de seno)
 - $\sin a \cos B = \cos b \sin c - \sin b \cos c \cos A$,

onde A , B e C são os ângulos e a , b e c são os lados do triângulo. Considerando o triângulo esférico XPY da figura do sistema eclíptico, achar fórmulas para latitude celeste e longitude celeste em termos da ascensão reta e declinação do X .

5. Considerando a figura do sistema equatorial para um observador numa latitude norte, achar a relação entre a distância de zênite, a latitude, a declinação e o ângulo horário. (sugestão: usar a fórmula de co-seno).

8 TRANSFORMAÇÕES DE COORDENADAS

Em geral, para especificar a posição de um corpo celeste numa maneira melhor e conveniente, as coordenadas de um corpo celeste conhecidas num sistema precisam ser transformadas para coordenadas num outro sistema. Por exemplo, um corpo celeste observado de uma estação teria como coordenadas o azimute e a elevação num sistema horizontal, e para se saber a posição dele num sistema inercial, uma transformação de coordenadas será necessária.

8.1 Transformação no plano

Supõe-se que as coordenadas x e y de uma massa pontual P são conhecidas no sistema retangular XOY e precisa-se conhecer as coordenadas x' e y' de P no sistema $X'OY'$, que é formado por uma rotação do sistema XOY por um ângulo θ .

Da Figura 8.1, tem-se:

$$x' = OB = OE + EB. \quad (8.1)$$

Do triângulo OAE , tem-se:

$$\begin{aligned} OE &= OA \cos \theta \\ &= x \cos \theta. \end{aligned} \quad (8.2)$$

Do triângulo FAP , tem-se:

$$\begin{aligned} FP &= PA \cos(90^\circ - \theta) \\ &= y \operatorname{sen} \theta \quad (= EB). \end{aligned} \quad (8.3)$$

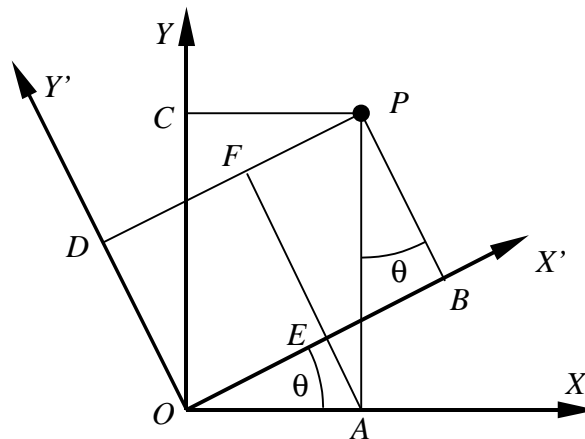


Figura 8.1 - Transformação no plano

Então,

$$x' = x \cos \theta + y \operatorname{sen} \theta. \quad (8.4)$$

Agora,

$$y' = OD = EF = AF - AE. \quad (8.5)$$

Do triângulo OAE , tem-se:

$$\begin{aligned} AE &= OA \operatorname{sen} \theta \\ &= x \operatorname{sen} \theta. \end{aligned} \quad (8.6)$$

Do triângulo AFP ,

$$\begin{aligned} AF &= AP \operatorname{sen} (90^\circ - \theta), \\ &= y \operatorname{cos} \theta. \end{aligned} \quad (8.7)$$

Então,

$$y' = -x \operatorname{sen} \theta + y \operatorname{cos} \theta. \quad (8.8)$$

Assim, a equação de transformação é dada por:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \operatorname{cos} \theta & \operatorname{sen} \theta \\ -\operatorname{sen} \theta & \operatorname{cos} \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}. \quad (8.9)$$

8.2 Transformação no espaço

A transformação dada na Seção 8.2 é chamada transformação de coordenadas em sistemas de coordenadas de duas dimensões. A extensão desta transformação para sistemas de três dimensões é fácil e automática. As matrizes de rotação ortogonais convencionais de dimensão 3×3 : $\mathbf{R}_1(\theta)$, $\mathbf{R}_2(\theta)$, $\mathbf{R}_3(\theta)$, são usadas para girar todo o sistema de um ângulo θ ao redor dos eixos x , y e z respectivamente e são dadas por:

$$\mathbf{R}_1(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \operatorname{cos} \theta & \operatorname{sen} \theta \\ 0 & -\operatorname{sen} \theta & \operatorname{cos} \theta \end{bmatrix}, \quad (8.10)$$

$$\mathbf{R}_2(\theta) = \begin{bmatrix} \operatorname{cos} \theta & 0 & -\operatorname{sen} \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \operatorname{sen} \theta & 0 & \operatorname{cos} \theta \end{bmatrix}, \quad (8.11)$$

$$\mathbf{R}_3(\theta) = \begin{bmatrix} \operatorname{cos} \theta & \operatorname{sen} \theta & 0 \\ -\operatorname{sen} \theta & \operatorname{cos} \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (8.12)$$

8.3 Propriedades das matrizes de transformação

As matrizes de transformação são consistentes com um sistema de coordenadas dextrógiro e os sinais são positivos para rotações anti-horário quando vistas do lado positivo do eixo de rotação em direção à origem.

Observa-se que a inversa de uma matriz de rotação é a própria matriz transposta e o determinante dela é igual a um. Isto é:

$$\begin{aligned} \mathbf{R}^{-1}(\theta) &= \mathbf{R}^T(\theta) = \mathbf{R}(-\theta), \\ |\mathbf{R}| &= 1. \end{aligned} \quad (8.13)$$

8.4 Exemplos de transformações

A Figura 8.2 descreve a transformação do sistema de coordenadas terrestre para o sistema de coordenadas celeste. Matematicamente, a transformação é dada pela equação:

$$\mathbf{X} = \mathbf{R}_3(-\theta)\mathbf{X}'. \quad (8.14)$$

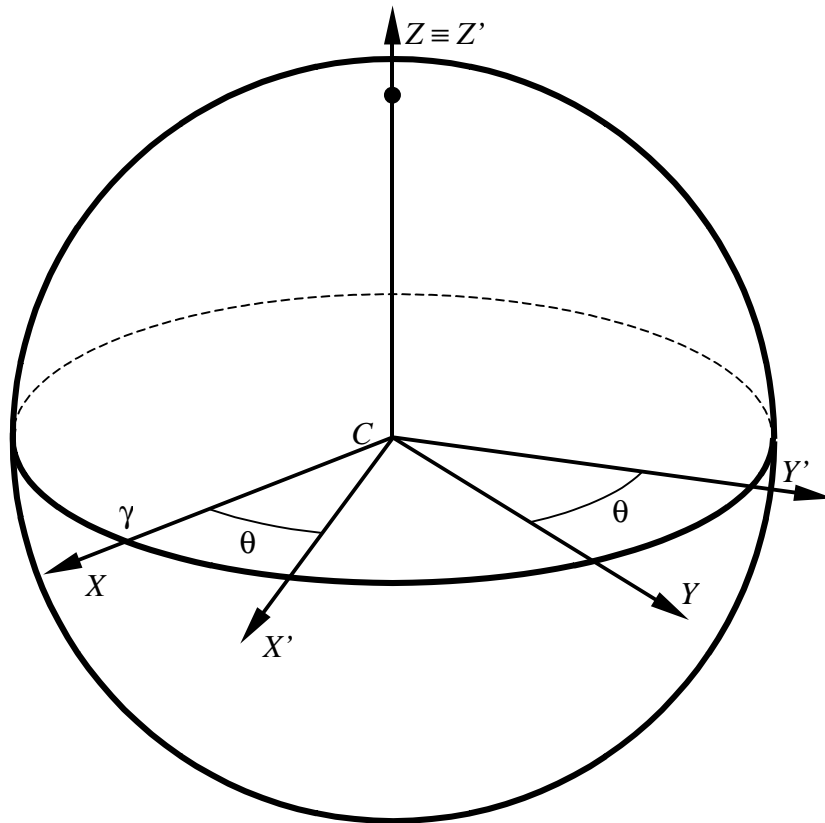


Figura 8.2 - Um exemplo de transformação

A Figura 8.3 descreve a transformação de um sistema no plano orbital em um sistema no plano equatorial. Matematicamente, a transformação é dada pela equação:

$$\mathbf{X}_E = \mathbf{R}(\Omega, i, \omega) \mathbf{X}_O, \quad (8.15)$$

$$\mathbf{R}(\Omega, i, \omega) = \begin{bmatrix} P_1 & P_2 & P_3 \\ Q_1 & Q_2 & Q_3 \\ R_1 & R_2 & R_3 \end{bmatrix}, \quad (8.16)$$

onde

$$P_1 = \cos \omega \cos \Omega - \operatorname{sen} \omega \cos i \operatorname{sen} \Omega, \quad (8.17)$$

$$P_2 = -\operatorname{sen} \omega \cos \Omega - \cos \omega \cos i \operatorname{sen} \Omega, \quad (8.18)$$

$$P_3 = \operatorname{sen} i \operatorname{sen} \Omega, \quad (8.19)$$

$$Q_1 = \cos \omega \operatorname{sen} \Omega + \operatorname{sen} \omega \cos i \cos \Omega, \quad (8.20)$$

$$Q_2 = -\operatorname{sen} \omega \operatorname{sen} \Omega + \cos \omega \cos i \cos \Omega, \quad (8.21)$$

$$Q_3 = -\operatorname{sen} i \cos \Omega, \quad (8.22)$$

$$R_1 = \operatorname{sen} \omega \operatorname{sen} i, \quad (8.23)$$

$$R_2 = \cos \omega \operatorname{sen} i, \quad (8.24)$$

$$R_3 = \cos i. \quad (8.25)$$

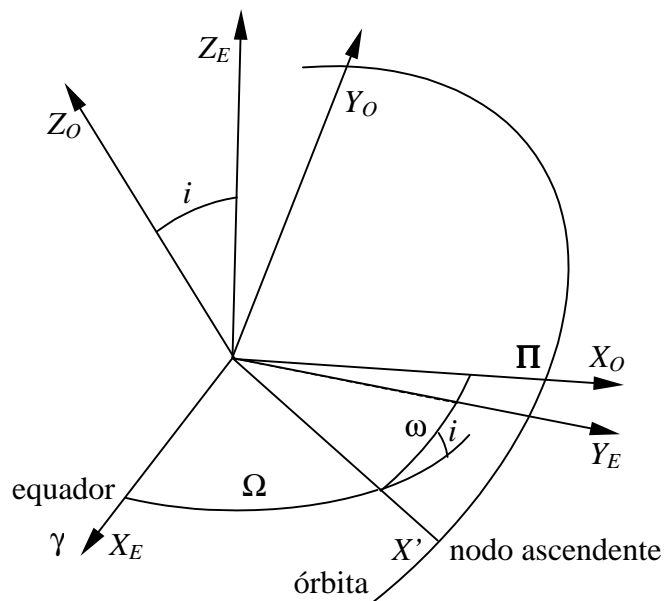


Figura 8.3 - Um exemplo de transformação

8.5 Exercícios

1. Qual é a matriz de transformação do sistema de coordenadas terrestre médio para o celeste verdadeiro?
2. Deduzir a matriz de transformação de um sistema no plano orbital para um sistema no plano equatorial (obs: ver a Figura 8.3)

9 SISTEMAS DE TEMPO

A medida de tempo é baseada na rotação da Terra. O tempo é determinado pela posição no céu, em relação ao meridiano local, de um objeto de referência na esfera celeste. Existem várias medidas de tempo, dependendo dos objetos escolhidos.

9.1 Tempo universal

O corpo celeste escolhido neste caso é o Sol. O dia solar é o período da rotação da Terra em relação ao Sol. O *tempo solar aparente* para um observador num dado meridiano é definido como o ângulo horário do Sol mais 12 horas. A adição de 12 horas é devida à conveniência de começar o dia à meia-noite, em vez de ao meio-dia. Os astrônomos fazem ao contrário para evitar mudança do dia na mesma noite de observação. Assim, o tempo solar transcorrido desde o começo de um dia é o ângulo horário do Sol mais 12 horas.

Na primeira metade do dia, o Sol ainda não alcança o meridiano do observador. Portanto, a hora neste período é a.m. (ante meridiem). Ao meio-dia, o Sol está no meridiano e a hora depois deste cruzamento é p.m. (post-meridiem).

Mas, a duração exata de um dia solar aparente não é constante devido à variação na velocidade orbital da Terra e devido à inclinação da eclíptica de $23,5^\circ$ em relação ao plano equatorial. Por isso, foi definido um outro tempo chamado *tempo solar médio* que é de 12 horas mais o ângulo horário (medido para oeste do meridiano do observador) de um Sol fictício cujo período é igual ao período do Sol verdadeiro mas que se move com uma velocidade constante ao longo do plano equatorial. Em outras palavras, o tempo solar médio é simplesmente o tempo solar aparente, tomada a média uniformemente.

Embora o tempo solar médio progrida uniformemente, este ainda é inconveniente para uso prático porque este tempo é definido como ângulo horário do Sol médio, mas o ângulo horário se refere ao meridiano celeste local, que é diferente para cada longitude terrestre. Para evitar a confusão de se ter horários diferentes para cada região do globo terrestre, este é dividido em 24 fusos horários (ver Figura 9.1).

O tempo medido em cada fuso horário é o mesmo do meridiano que passa no meio daquele fuso. O tempo médio solar assim padronizado é chamado *hora padrão*.

Para ter uma hora padrão em todo o globo, os fusos são numerados a partir do meridiano de Greenwich, positivo para oeste e negativo para leste. Como cada fuso corresponde a uma hora, o *tempo universal* de um observador cujo meridiano é z fusos horários a oeste de Greenwich, e cuja hora solar média é x horas, é definido por:

$$TU = x + z. \quad (9.1)$$

9.2 Tempo sideral

Sejam a Terra e a esfera celeste (centrada em C) desenhadas como mostrado na Figura 9.2. Seja G a posição de Greenwich, S a posição de um local qualquer na superfície da

Terra representados na esfera celeste. Então, o ângulo entre os meridianos PS e PG é a longitude λ do local.



Figura 9.1 - Divisão do globo em fusos horários

Se γ é a posição do ponto vernal, então $GP\gamma$ é o ângulo horário θ_g de γ para um observador no meridiano de Greenwich e $SP\gamma$ é o ângulo horário θ para um observador no meridiano de S . Então:

$$SP\gamma = GP\gamma + SPG \quad (9.2)$$

$$\theta = \theta_g + \lambda \quad (9.3)$$

i.e. o ângulo horário θ de S é dado pela soma do ângulo horário θ_g de Greenwich e a longitude λ do observador em S .

Definindo o tempo sideral como o ângulo horário de γ , tem-se que o tempo sideral em Greenwich é igual à diferença entre o tempo sideral em S e a longitude de S , sendo que a longitude é positiva para longitudes a leste de Greenwich e negativa para longitudes a oeste. O tempo sideral em S é chamado tempo sideral local.

Define-se *dia solar* como o período da rotação da Terra em relação ao Sol e *dia sideral* como o tempo requerido pela Terra para completar uma rotação em relação ao ponto vernal γ . Devido ao sentido do movimento de translação orbital da Terra, o dia sideral é um pouco mais curto do que o dia solar. Referindo-se a Figura 9.3, se se supuser que um dia começa quando a Terra está na posição A com o Sol sobre o meridiano de um

observador no ponto O e o ponto γ na extensão da linha AS , quando a Terra faz uma rotação completa, o ponto γ estará novamente sobre o meridiano local para o observador no ponto O . Mas, neste período, a Terra se deslocou de A para B na sua órbita e o Sol não estará sobre o meridiano local para o observador em O .

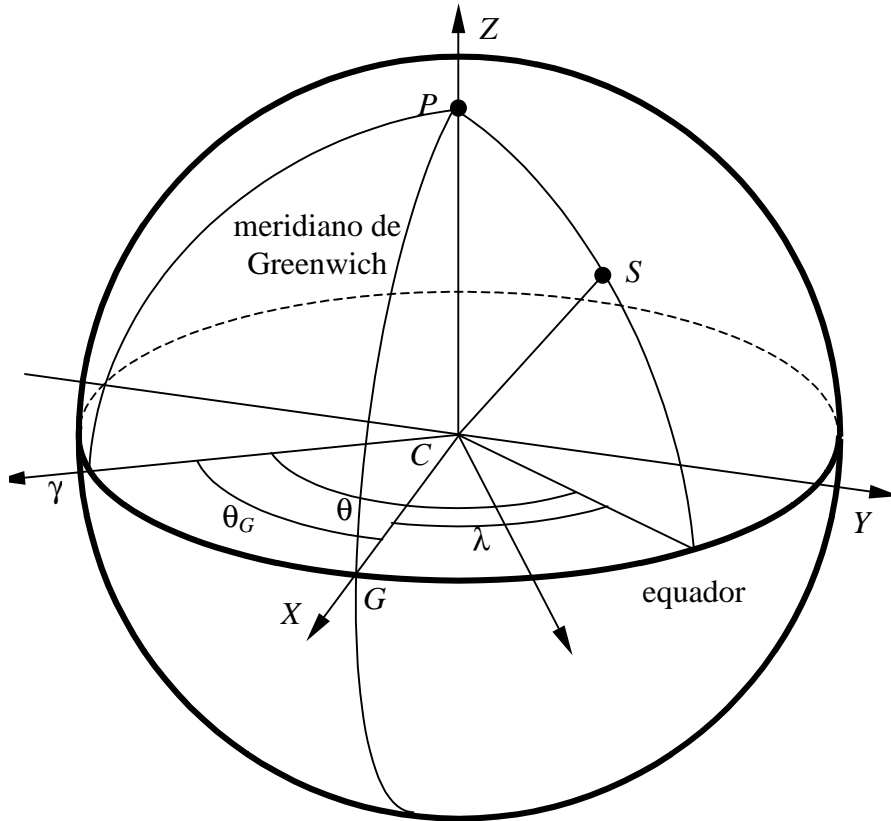


Figura 9.2 - Definição do tempo sideral

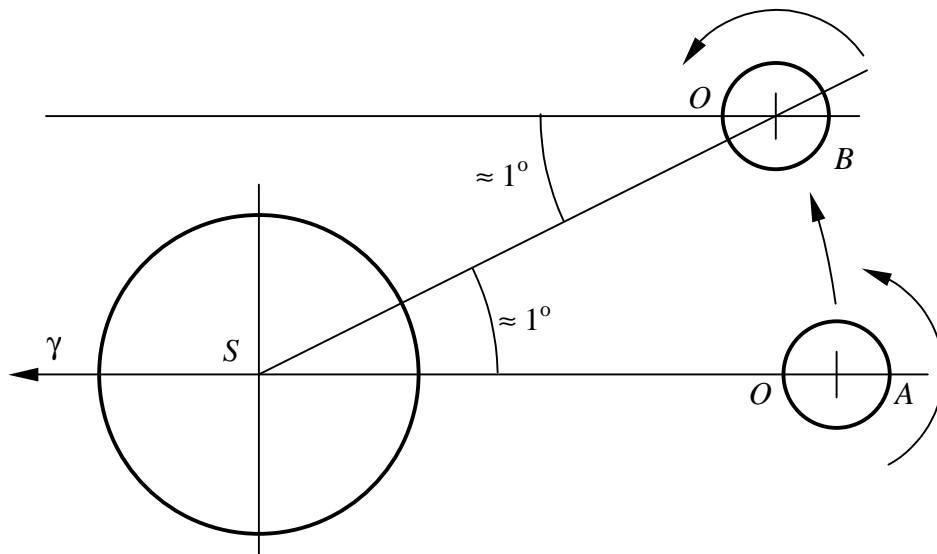


Figura 9.3 - Relação entre dia solar e dia

Um ano tem 365 dias e um círculo de 360°; portanto o movimento diário do Sol na sua órbita é aproximadamente 1°. Assim, a Terra tem que girar um grau a mais para ter o Sol no meridiano local. Como a Terra leva 4 minutos para girar um grau, um dia solar é aproximadamente 4 minutos mais longo do que um dia sideral.

9.3 Data Juliana

A data Juliana é simplesmente uma contagem contínua de cada dia transcorrido desde uma época particular. Esta época foi escolhida como 4713 A.C. A data Juliana é medida de meio-dia para meio-dia e portanto é um número inteiro doze horas depois da meia-noite. Esta contagem contínua de dias a partir de uma certa época evita a confusão gerada pela mudança de datas do calendário ao longo do tempo. Por exemplo, em 1582, o Papa Gregório XIII declarou a data 05 de outubro como sendo 15 de outubro, eliminando 10 dias. Em 1752, os ingleses eliminaram 11 dias, e assim por diante. A definição da data Juliana elimina todas estas discrepâncias. Existem tabelas de conversão de uma data qualquer de calendário para data Juliana. Para conversão de um tempo qualquer (a hora, minuto, segundo do dia em questão), basta achar a fração do dia, já que a data Juliana muda cada 24 horas.

9.4 Cálculo do tempo sideral de Greenwich

O cálculo prático de tempo sideral de Greenwich, θ_g , à meia-noite ou à 0h TU é dado pela equação:

$$\theta_{g_o} = 99,6909833^\circ + 36000,7689^\circ S_J + 0,00038708^\circ S_J^2, \quad (9.4)$$

onde o tempo S_J é medido em séculos como:

$$S_J = (D_J - 2415020.0)/36525, \quad (9.5)$$

com θ_{g_o} em graus, e onde D_J é o Dia Juliano. Em outras palavras, o tempo sideral de Greenwich à zero horas TU, i.é. θ_{g_o} , é obtido diretamente como função da data juliana à 0h TU.

Agora, o tempo sideral de Greenwich em tempo t qualquer é dado por:

$$\theta_g = \theta_{g_o} + (t - t_o) \dot{\theta}, \quad (9.6)$$

onde

$$\dot{\theta} = 0,25068447^\circ / \text{min.} = 360,985647^\circ / \text{dia.} \quad (9.7)$$

é a taxa de rotação sideral.

9.5 Exercícios

1. Numa elevação de 30° em Monte Roraima (latitude = $+5^\circ$) foi observada uma estrela *XIZ* cujas coordenadas equatoriais eram 10° (ascensão reta) e 15° N (declinação). Achar:
 - a) o azimute da estrela e
 - b) a hora sideral da observação
2. Considere um observador num local de longitude 45° (*O*). Se o ângulo horário do Sol médio local coincide com o do ponto vernal e é igual a 9h, quais são o tempo universal do observador e o tempo sideral em Greenwich?
3. O ponto extremo norte do Brasil é Oiapoque no Território do Amapá com latitude e longitude dadas por $+4^\circ$ e -52° , respectivamente. Neste local, no tempo sideral de 60° , foi observado um corpo celeste cujas coordenadas horizontais são 80° (Azimute NESO) e 45° (Elevação). Achar as coordenadas equatoriais do corpo celeste.
4. Para um observador num local de 30° (*E*), se o tempo sideral no local for 8h e se o ângulo horário do Sol médio local for 9h, achar o tempo sideral em Greenwich e o tempo universal do observador.
5. Quantos dias siderais a mais por ano existem do que dias solares?
6. Em que dia, aproximadamente, a hora solar coincide com a hora sideral?
7. Se o tempo médio local é 15:30h e o tempo universal é 11:30h, qual é a longitude do local?
8. A longitude de Los Angeles é, aproximadamente, 120° (*O*). Determinar o fuso horário correspondente.
9. Se a taxa precessional é aproximadamente $50''$ por ano, provar que o ciclo completo é aproximadamente 26000 anos.
10. A cidade de São José dos Campos está situada na longitude de 46° (*O*). Calcular o tempo sideral neste local hoje neste instante.
11. Qual é a data juliana que corresponde à 0 horas TU de 23 de dezembro de 1975?
12. Qual é a data juliana que corresponde à 24 de agosto de 1978 às 05 horas 30 minutos e 22,3 segundos *TU*?

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BATE, R. R.; MUELLER, D. D.; WHITE, J. **Fundamentals of Astrodynamics**. New York: Dover Publications, 1971. (ISBN-0-486-600061-0)

BROUWER, D.; CLEMENCE, G.M. **Methods of celestial mechanics**. New York: Academic, 1961.

CHOBOTOV, V. A. **Orbital Mechanics** – Second Edition. Reston: American Institute of Aeronautics and Astronautics, 1996. (ISBN-1-56347-179-5)

DEUTSCH, R. **Orbital dynamics of space vehicles**. Englewood Cliffs: Prentice-Hall, 1963.

ESCOBAL, P.R. **Methods of orbit determination**. New York: John Wiley, 1965.

MONTENBRUCK, O.; GILL, E. **Satellite Orbits** – Models, Methods, Applications. Berlin Heidelberg: Springer-Verlag, 2000. (ISBN-3-540-67280-X)

MOULTON, F. R. **An Introduction to Celestial Mechanics** – Second Revised Edition. New York: Dover Publications, 1970. (ISBN-0-486-64687-4)