



MECB/SS

TÍTULO

ALGORITMOS DE RASTREIO ASSISTIDO PARA  
A ESTAÇÃO TERRENA

CÓDIGO AP

AS1B - AS211

PREPARADO POR

APROVAÇÕES

ASS. NOME	<i>Helio</i> Hélio Koiti Kuga	19 / 09 / 88 DATA
--------------	----------------------------------	----------------------

ASS. NOME	<i>Decio</i> Décio Castilho Ceballos	19 / 09 / 88 DATA
--------------	---	----------------------

ASS. NOME	<i>Valdemir</i> Valdemir Carrara	19 / 09 / 88 DATA
--------------	-------------------------------------	----------------------

ASS. NOME	<i>Helio</i> Hélio Koiti Kuga	19 / 09 / 88 DATA
--------------	----------------------------------	----------------------

ASS. NOME	_____ _____ _____ DATA	_____ _____ _____ DATA
--------------	---------------------------------	---------------------------------

ASS. NOME	<i>Tatuô</i> Tatuô Nakanishi	19 / 09 / 88 DATA
--------------	---------------------------------	----------------------

ASS. NOME	_____ _____ _____ DATA	_____ _____ _____ DATA
--------------	---------------------------------	---------------------------------

ASS. NOME	_____ _____ _____ DATA	_____ _____ _____ DATA
--------------	---------------------------------	---------------------------------

ASS. NOME	_____ _____ _____ DATA	_____ _____ _____ DATA
--------------	---------------------------------	---------------------------------

ASS. NOME	_____ _____ _____ DATA	_____ _____ _____ DATA
--------------	---------------------------------	---------------------------------



MECB / SS

LISTA DE DIVULGAÇÃO

NOME	ORGÃO	Nº CÓPIAS
- José Borges Escada Jr.	GSM	1
- Hélio Koiti Kuga	DEM	1
- Marcelo Lopes O. Souza	DEM	1
- Valdemir Carrara	DEM	1
- Valder Matos de Medeiros	DEM	1
- Maria de Fátima M. Francisco	DEL	1
- Pedro M. de Barros	GSM	1
- José Luis B. Aguirre	DDE	1
- Luiz Claudio Esteves	GEC	1



PÁGINA	VERSÃO	DATA	REFERÊNCIA DA MODIFICAÇÃO	OBSERVAÇÃO
i	1	19/09/88		
ii	2	28/09/89		
iii	2	28/09/89		
iv	1	19/09/88		
1	1	19/09/88		
2	1	19/09/88		
3	1	19/09/88		
4	1	19/09/88		
5	1	19/09/88		
6	1	19/09/88		
7	1	19/09/88		
8	1	19/09/88		
9	1	19/09/88		
10	2	28/09/89		
11	1	19/09/88		
12	2	28/09/89		
13	1	19/09/88		
14	1	19/09/88		
15	1	19/09/88		
16	1	19/09/88		
17	1	19/09/88		
18	1	19/09/88		
19	1	19/09/88		
20	1	19/09/88		
21	1	19/09/88		
22	1	19/09/88		
23	2	28/09/89		
24	2	28/09/89		
25	2	28/09/89		
26	2	28/09/89		
27	1	19/09/88		
28	1	19/09/88		
29	1	19/09/88		





CONTEÚDO

1 - Introdução

2 - Referências

3 - Método determinístico de determinação de órbita

4 - Método estatístico de determinação parcial de órbita

5 - Simulações

5.1 - Simulações da órbita

5.2 - Simulação das observações

5.3 - Condições iniciais

5.4 - Resultados

6 - Comentários finais



## 1 - INTRODUÇÃO

Este estudo fornece o resultado de simulações digitais de dois métodos de determinação parcial de órbita em tempo real de satélites de baixa altitude, tais como os da MECB. Para atingir os requisitos de tempo real, os algoritmos a serem implementados devem ser rápidos e robustos de maneira a fornecer estimativas confiáveis sem grande custo computacional (memória e CPU). Motivações para a implementação desses algoritmos na estação terrena ET, onde o computador da ET está fisicamente ligado ao controlador da antena, são as chamadas perdas de sinal do satélite. Estas perdas de sinal podem ocorrer devido a vários fatores. Uma passagem zenital provocaria o travamento ("dead lock") dos eixos cardãs da antena, caso não fosse previsto, e o atraso decorrente desse travamento, onde o eixo de azimute teria de girar  $180^\circ$  num intervalo de tempo reduzido, poderia implicar na perda do satélite no instante da passagem. Interferências momentâneas, como o apontamento da antena para o Sol, também podem provocar a perda do sinal e a recuperação pode não ser imediata. Além disso, no caso específico dos satélites de Coleta de Dados da MECB, existem regiões cegas da antena de bordo de forma que, dependendo da geometria da atitude do satélite em relação à antena da ET, podem ocorrer as chamadas zonas de silêncio onde transmissões da antena de bordo não são captadas na ET.

Como os ângulos de azimute e elevação serão medidos pela antena da ET, a idéia é utilizar essas medidas para refinar a órbita, ainda que parcialmente, enquanto elas estiverem disponíveis. Quando existir perda de sinal, a última estimativa refinada da órbita é utilizada para iniciar um procedimento simplificado de propagação orbital e previsão dos ângulos de apontamento de azimute e elevação, de modo que a antena possa se posicionar contínua e adequadamente para readquirir o sinal do satélite nos instantes subsequentes.

A determinação de todos os elementos orbitais (6) implica



num processo de estimação estatística que elevaria o "overhead" computacional a termos proibitivos para o computador da ET, que deveria estar concomitantemente realizando outras tarefas na ET. A idéia de determinação parcial (reconstituição somente de alguns elementos orbitais) surgiu de uma experiência bem sucedida deste tipo de algoritmos na estação de Cuiabá para rastreamento dos satélites Landsat (Aguirre e Medeiros, 1988). Lá, supõe-se órbita circular para reconstituir os elementos orbitais  $\Omega$  (ascensão reta do nodo ascendente) e  $f$  (anomalia verdadeira). Este mecanismo de estimação parcial de órbita e previsão dos dados angulares foi denominado de Rastreo Assistido (Aguirre e Medeiros, 1988). No caso dos algoritmos aqui propostos, estimar-se-ão a ascensão reta do nodo ascendente  $\Omega$  e a anomalia média  $M$ . Os algoritmos propostos assumem como hipóteses:

- variação lenta dos elementos orbitais não estimados,
- modelo dinâmico simplificado,
- disponibilidade de dados angulares.

Para uma passagem do satélite (de aproximadamente 15 minutos, bem menor que o período orbital de cerca de 100 minutos), os elementos orbitais não estimados (semi-eixo maior  $a$ , excentricidade  $e$ , inclinação  $i$ , e argumento do perigeu  $\omega$ ) variam pouco e podem ser considerados constantes.

O modelo dinâmico simplificado é necessário para obedecer as restrições de tempo real. O modelo de Brouwer (1959) é utilizado para exprimir a dinâmica dos elementos a serem estimados ( $\Omega$  e  $M$ ).

Os dados angulares são necessários para serem processados e produzirem as estimativas/refinamento dos elementos orbitais.

As razões para a escolha de  $\Omega$  e  $M$  como elementos a serem estimados tornam-se naturais quando se analisa a geometria de erros da órbita em relação à estação. A ascensão reta do nodo ascendente  $\Omega$  indica grosseiramente a posição azimutal da antena em



baixas elevações e a anomalia média  $M$  localiza o satélite ao longo do plano orbital. Os erros em  $\Omega$  afetam os valores dos ângulos de azimute e a elevação da antena no instante de aquisição, e os erros em  $M$  afetam a localização do satélite dentro de sua trajetória orbital. Este erro corresponde ao intervalo de tempo em que o satélite se atrasa ou se adianta em relação ao instante previsto. Além disso, os erros em  $\omega$  são compensados por um acréscimo correspondente em  $f$  já que, grosseiramente falando, estima-se a soma  $\omega+f$  primeiro e depois obtém-se  $M$  (ver Seção 3). Esta modelagem é válida também para órbitas elípticas, desde que a excentricidade seja bem conhecida (o que é fato comprovado pois os maiores erros orbitais estão na componente "along-track" ao longo da velocidade do satélite e não na caracterização da elipse orbital). Uma simplificação posterior poderia ser o refinamento somente do elemento  $M$ , o que não foi considerado neste trabalho, pois os requisitos de tempo real já são obedecidos (aparentemente, a menos de tempos de acesso e demais mecanismos de interface do programa com o controlador da antena).

Propôs-se dois algoritmos de rastreamento assistido de naturezas distintas, um deles determinístico onde se usa um método de média simplificado aplicado ao problema dos dois corpos (Seção 3); e o outro de natureza estatística onde também erros nas medidas angulares são considerados (Seção 4).

As simulações (Seção 5) foram conduzidas para passagens típicas dos satélites de coleta de dados da MECB e sob condições talvez até extremamente mais severas que as encontradas na prática.

Finalmente, são tecidos alguns comentários finais (Seção 6) que objetivam a fornecer subsídios e orientar a seleção do algoritmo a ser efetivamente implementado na ET.



## 2 - REFERÊNCIAS

AGUIRRE, J. L. B.; MEDEIROS, V. M. M. A satellite assisted tracking system with real time accomodation for maximal pointing accuracy. XVI Congress of the International Society for Photogrammetry and Remote Sensing, Kyoto, Japan, 1-10 July 1988. *Proceedings*, Vol. II, p.1.

BROUCKE, R. A. On the matrizant of the two body problem. *Astronomy and Astrophysics*, 6:173-182, 1970.

BROUWER, D. Solution of the problem of artificial satellite theory without drag. *The Astronomical Journal*, Vol. 64, no. 9, Nov. 1959.

ESCOBAL, P. R. *Methods of orbit determination*. NY, John Wiley, 1965.

JAZWINSKI, A. H. *Stochastic processes and filtering theory*. NY, Academic, 1970.

LEIBOLD, A. *Lecture series on trajectory estimation, satellite orbit determination and related error analysis*. DFVLR, Oberpfaffenhofen, Germany, Oct. 1980 (DFVLR-552/80/13).



### 3 - MÉTODO DETERMINÍSTICO DE DETERMINAÇÃO DE ÓRBITA

O problema do rastreamento assistido é relativamente mais simples que a determinação dos elementos orbitais, visto que no primeiro caso apenas dois dos seis elementos serão estimados. Some-se a isso o reduzido tempo de propagação da estimativa obtida, pois os elementos são gerados e utilizados durante a passagem do satélite por sobre a estação. O método determinístico de determinação dos elementos de variação rápida - a anomalia média e, numa taxa menor, a ascensão reta do nodo ascendente - consiste num processo de média aritmética dos valores medidos. Supõe-se, é claro, que as medidas são igualmente espaçadas no tempo. Esta hipótese não é essencial: o método continuaria válido para medidas não uniformemente distribuídas no tempo, embora os resultados da estimação certamente refletissem uma tendência a assumir os valores das medidas que estivessem mais concentradas num dado intervalo. As medidas de azimute e elevação da antena de rastreamento são transformadas por esse processo em medidas de ascensão reta do nodo e anomalia média e, a seguir, os valores médios dos últimos são atualizados. A transformação requer, no entanto, um conhecimento prévio, ainda que aproximado, da ascensão reta do nodo e da anomalia média num dado instante, para a inicialização do processo.

O primeiro passo consiste em se obter uma primeira aproximação para o módulo do vetor posição entre a estação e o satélite (range). Já que a direção deste vetor é conhecida a cada instante através das medidas de azimute ( $A$ ) e elevação ( $h$ ), pode-se usar a relação:

$$\vec{r} = \vec{\rho} + \vec{R}$$

para se obter o módulo do vetor  $\rho$ . Nesta relação,  $\vec{r}$  representa o vetor posição do satélite e  $\vec{R}$  o vetor posição da estação, ambos referidos ao sistema geocêntrico (Escobal, 1965). Embora se disponha, a princípio, do vetor  $\vec{r}$  (pois se supõe conhecida uma

estimativa dos elementos orbitais), o método usa apenas o módulo do vetor  $\vec{r}$  como primeira aproximação. Por sua vez, o vetor posição do satélite relativo à estação, no sistema geocêntrico, é obtido efetuando-se uma rotação a partir do sistema topocêntrico:

$$\begin{aligned}\vec{\rho} &= \rho R(\psi, \lambda) (-\cos A \cosh \hat{i} + \sin A \cosh \hat{j} + \sinh \hat{k}) = \\ &= \rho (c_x \hat{i} + c_y \hat{j} + c_z \hat{k})\end{aligned}$$

onde  $c_x$ ,  $c_y$  e  $c_z$  são os cossenos diretores da direção estação-satélite no sistema geocêntrico. As coordenadas da estação de rastreamento são definidas através da longitude  $\lambda$ , latitude geodética  $\psi$  e altitude  $H$ . A matriz de rotação que transforma coordenadas topocêntricas em geocêntricas é dada por:

$$R(\psi, \lambda) = \begin{bmatrix} \sin\psi \cos\lambda & -\sin\lambda & \cos\psi \cos\lambda \\ \sin\psi \sin\lambda & \cos\lambda & \cos\psi \sin\lambda \\ -\cos\psi & 0 & \sin\psi \end{bmatrix}$$

Resolvendo as equações acima para  $\rho$ , tem-se:

$$\rho = (r^2 - R^2 + B^2)^{1/2} - B$$

onde

$$B = x_e c_x + y_e c_y + z_e c_z$$

Nesta relação,  $x_e$ ,  $y_e$  e  $z_e$  são as componentes da posição da estação no sistema geocêntrico.

O próximo passo é reconstituir o vetor posição do satélite:

$$\vec{r} = (x_e + \rho c_x) \hat{i} + (y_e + \rho c_y) \hat{j} + (z_e + \rho c_z) \hat{k}$$

onde  $\hat{i}$ ,  $\hat{j}$  e  $\hat{k}$  são os versores do sistema geocêntrico terrestre. A latitude  $\psi_e$  e a longitude  $\lambda_e$  geocêntricas do satélite neste ponto podem agora serem obtidas por:



$$\sin \psi_0 = (z_0 + \rho c_z) / r$$

$$\operatorname{tg} \lambda_0 = (y_0 + \rho c_y) / (x_0 - \rho c_x)$$

A ascensão reta do nodo ascendente da órbita  $\Omega$  relaciona-se com a longitude do ponto sub-satélite através da relação:

$$\Omega = \theta_g + \lambda_0 - \lambda_0$$

caso o satélite esteja na parte ascendente da órbita, ou:

$$\Omega = \theta_g + \lambda_0 - (\pi - \lambda_0)$$

caso esteja na parte descendente. Nesta equação,  $\theta_g$  é o tempo sideral de Greenwich, no instante em questão, e  $\lambda_0$  é obtido de:

$$\sin \lambda_0 = \operatorname{tg} \psi_0 \operatorname{ctg} i$$

sendo  $i$  a inclinação orbital. Uma forma mais prática de se obter a ascensão reta do nodo sem verificar se o satélite está na parte ascendente ou descendente da órbita, é através da comparação dos valores possíveis de  $\Omega$  com seu valor anterior (ou estimado). Como a ascensão reta do nodo não se modifica bruscamente com o tempo, o valor correto será aquele que mais se aproximar da estimativa anterior.

A anomalia média  $M$ , por sua vez, será obtida a partir da anomalia verdadeira  $f$ :

$$f = \arctg(\operatorname{tg} \psi_0 / (\cos \lambda_0 \sin i)) - \omega$$

com  $\omega$  representando o argumento do perigeu. Também nesta equação o valor de  $\lambda_0$  deve ser substituído pelo seu complemento  $(\pi - \lambda_0)$  caso o satélite esteja na metade descendente da órbita. A anomalia verdadeira é, a seguir, utilizada na obtenção da anomalia

excêntrica  $E$ , através das relações:

$$\sin E = \frac{r}{a} \frac{\sin f}{(1 - e^2)^{1/2}}$$

$$\cos E = \frac{r \cos f + a e}{a}$$

sendo  $a$  o semi-eixo maior e  $e$  a excentricidade da órbita. Finalmente tem-se, pela equação de Kepler,

$$M = E - e \sin E$$

que fornece a anomalia média no instante considerado.

Os novos valores da ascensão reta e da anomalia média irão produzir uma magnitude da posição geocêntrica do satélite,  $r$ , ligeiramente diferente do valor assumido inicialmente. O processo pode, no entanto, ser iterado até atingir-se uma precisão adequada. Alguns testes mostraram que basta uma nova iteração para atingir-se uma precisão melhor que 0.1% no valor de  $r$ , calculado com:

$$r = a(1 - e \cos E).$$

Embora os valores de  $\Omega$  e  $M$  sejam exatos matematicamente, eles trazem em si os erros das medidas de azimuth e elevação. Diferem, portanto, do valor que seria obtido caso não houvessem erros de leitura. Um método de média ou de estimação deve portanto ser empregado para se refinar o conhecimento da ascensão reta do nodo e da anomalia média e para filtrar uma eventual má medida local instantânea. Foi adotado, como método de média, uma média aritmética simples, baseado nas seguintes considerações:

1-Métodos mais complexos demandam, quase sempre, um maior tempo de processamento e, especificamente neste caso, o interesse maior é na redução do tempo computacional.



2-Durante o intervalo de tempo de uma passagem sobre a estação, pode-se considerar que a ascensão reta do nodo e o movimento médio do satélite não se modificam, principalmente porque os elementos estimados são os médios e não os osculadores.

Considere, então,  $\Omega_{ii}$  como sendo a ascensão reta do nodo obtida por meio da transformação das medidas angulares de azimute e elevação, associada ao instante  $t_i$ . Considere também que  $\Omega_i$  representa a estimativa (média) de  $\Omega$  no instante  $t_i$ . Por definição de média aritmética, tem-se:

$$\Omega_i = \frac{\Omega_{ii} + (i - 1)\Omega_{i-1}}{i}$$

que fornece a nova média em função da antiga ( $\Omega_{i-1}$ ). A primeira estimativa, é claro, será igual ao próprio valor da medida  $\Omega_{i1}$ .

No caso da anomalia média, a sua rápida variação com o tempo impede que seja realizada uma média antes de reduzir-se as observações ao mesmo instante. Seja então  $M_{ii}$  a anomalia média no instante  $t_i$ , obtida a partir das observações de azimute e elevação. Considere ainda a anomalia média  $M_i$  estimada no instante  $t_i$  e a anomalia estimada no instante anterior  $t_{i-1}$ ,  $M_{i-1}$ . Neste intervalo de tempo, a anomalia média deve ser propagada analiticamente e, desta forma,

$$\bar{M}_i = M_{i-1} + \dot{M}(t_i - t_{i-1})$$

onde  $\dot{M}$  é a taxa de variação temporal da anomalia média. A nova estimativa será dada então por:

$$M_i = \frac{M_{ii} + (i - 1)\bar{M}_i}{i}$$

A propagação, no entanto, introduz uma nova fonte de erro, através dos intervalo de tempo entre as medidas ( $t_i - t_{i-1}$ ) e



também através do valor de  $\dot{M}$ , que depende da precisão com que é conhecido o semi-eixo maior da órbita. Em outras palavras, o semi-eixo maior médio da órbita é suposto ser aproximadamente igual ao semi-eixo osculador.

Finalmente, a taxa de variação da anomalia média,  $\dot{M}$ , é extraída da expressão (Brouwer, 1959):

$$\dot{M} = n \left[ 1 + \frac{3}{2} J_2 \frac{R_0^2}{a^2} \frac{(1 - e^2)^{1/2}}{(1 - e^2)^2} \left( 1 - \frac{3}{2} \sin^2 i \right) \right]$$

onde  $J_2$  é o coeficiente harmônico zonal terrestre de segunda ordem,  $a$ ,  $e$  e  $i$  são o semi-eixo maior, excentricidade e inclinação orbital, respectivamente,  $R_0$  o raio equatorial terrestre e  $n$  o movimento médio orbital, dado por:

$$n = \sqrt{\mu / a^3}$$

sendo  $\mu$  a constante geogravitacional ( $\mu = 3.986 \cdot 10^{14} \text{ m}^3/\text{s}^2$ ).

#### 4 - MÉTODO ESTATÍSTICO DE DETERMINAÇÃO PARCIAL DE ÓRBITA

O método estatístico escolhido para a determinação parcial de órbita em tempo real foi o filtro de Kalman. Ele tem duas características que fazem-no adequado para este problema: recursividade e simplicidade. A recursividade permite a obtenção de novas estimativas a cada observação processada, sem necessidade de armazenamento das observações. A simplicidade é outra característica marcante comparada a outros métodos estatísticos tais como o mínimos quadrados ou o filtro bayesiano. Neste problema de reconstituição parcial da órbita, onde somente dois elementos orbitais são estimados, assume-se a seguinte dinâmica:

$$\begin{aligned}\dot{\Omega} &= K_1(a, e, i) \\ \dot{M} &= K_2(a, e, i)\end{aligned}\tag{4.1}$$

onde  $\Omega$  é a ascensão reta do nodo ascendente,  $M$  é a anomalia média, e  $K_1$  e  $K_2$  são valores constantes calculados com base na teoria de Brouwer (1959) levando em conta os harmônicos zonais  $J_2$  e  $J_4$  e são funções dos elementos orbitais  $a$  (semi-eixo maior),  $e$  (excentricidade), e  $i$  (inclinação). Lembrar portanto que somente  $\Omega$  e  $M$  são considerados variantes no tempo, regidos pelas Relações 4.1, ao passo que  $a$ ,  $e$ ,  $i$ ,  $\omega$  (argumento do perigeu) são considerados constantes ao longo da passagem do satélite sobre a estação.

O modelo contínuo expresso em 4.1 pode ser discretizado na seguinte forma:

$$\begin{aligned}\Omega_{k+1} &= \Omega_k + K_1 \Delta t + \omega_1 \\ M_{k+1} &= M_k + K_2 \Delta t + \omega_2 \\ \Delta t &= t_{k+1} - t_k\end{aligned}\tag{4.2}$$

onde  $\omega_1$  e  $\omega_2$  são erros da dinâmica com as seguintes estatísticas:

$$\begin{aligned}
 E[\omega_1] &= 0, \quad E[\omega_1 \omega_1^T] = q_1 > 0 = \text{constante} \\
 E[\omega_2] &= 0, \quad E[\omega_2 \omega_2^T] = q_2 > 0 = \text{constante} \\
 E[\omega_1 \omega_2^T] &= 0
 \end{aligned} \tag{4.3}$$

onde  $E[\cdot]$  é o operador expectância. Portanto, o modelo discreto é colocado na seguinte forma:

$$x_{k+1} = \phi(k) x_k + \omega_k$$

onde  $x_k$  é o vetor contendo  $\Omega_k$  e  $M_k$ ,  $\omega_k$  é o vetor contendo os ruídos  $\omega_1$  e  $\omega_2$ , e  $\phi(k)$  é a matriz de transição de estado:

$$\phi(k) = \begin{bmatrix} 1+(K_1/\Omega_k)\Delta t & 0 \\ 0 & 1+(K_2/M_k)\Delta t \end{bmatrix} \tag{4.4}$$

O modelo das observações é da forma:

$$y_k = h(x_k) + v_k \tag{4.5}$$

onde  $y_k$  é o vetor das observações formado pelos ângulos de azimute e elevação do instante  $k$ ,  $h(x_k)$  é a função vetorial que descreve a relação não linear entre as observações e o estado  $x_k$ , e  $v_k$  são os erros das observações com as seguintes estatísticas:

$$E[v_k] = 0, \quad E[v_k v_k^T] = R_k > 0 \tag{4.6}$$

A função  $h(x_k)$  deve ser especificada para cada tipo de observação. Assim, seja  $A$  o azimute e  $h$  a elevação. Para este caso a função  $h$  vale:

$$A = \tan^{-1}(y_T / -x_T), \quad h = \sin^{-1}(z_T / r_T) \tag{4.7}$$

onde  $\vec{r}_T = (x_T, y_T, z_T)$  são componentes do vetor posição do satélite em coordenadas topocêntricas, i.e., centradas na estação,



calculadas a partir das coordenadas inerciais do satélite e da estação. A relação entre as coordenadas topocêntricas  $\vec{r}_T$  e inerciais  $\vec{r}$  é formada a partir de  $\vec{\rho} = \vec{r} - \vec{R}$  onde  $\vec{\rho}$  é o vetor range. Então,  $\vec{r}_T$  é calculado por meio de  $\vec{r}_T = R_z(\theta, \psi) \vec{\rho}$ , onde  $R_z(\theta, \psi)$  é a matriz de rotação conforme discriminado em 4.10,  $\theta$  é a longitude sideral da estação, e  $\psi$  é a latitude geodésica da estação.

A regra da cadeia fornece as matrizes de derivadas parciais que relacionam as observações  $(A, h)$  ao estado  $(\Omega, M)$ :

$$\frac{\partial A}{\partial \Omega} = \frac{\partial A}{\partial \vec{r}_T} \frac{\partial \vec{r}_T}{\partial \vec{r}} \frac{\partial \vec{r}}{\partial \Omega}, \quad \frac{\partial A}{\partial M} = \frac{\partial A}{\partial \vec{r}_T} \frac{\partial \vec{r}_T}{\partial \vec{r}} \frac{\partial \vec{r}}{\partial M} \quad (4.8)$$

$$\frac{\partial h}{\partial \Omega} = \frac{\partial h}{\partial \vec{r}_T} \frac{\partial \vec{r}_T}{\partial \vec{r}} \frac{\partial \vec{r}}{\partial \Omega}, \quad \frac{\partial h}{\partial M} = \frac{\partial h}{\partial \vec{r}_T} \frac{\partial \vec{r}_T}{\partial \vec{r}} \frac{\partial \vec{r}}{\partial M}$$

onde  $\vec{r} = (x, y, z)$  é o vetor contendo as componentes inerciais da posição do satélite. As parciais de  $A$  e  $h$  em relação a  $\vec{r}_T$  (coordenadas topocêntricas) são:

$$\begin{aligned} \frac{\partial A}{\partial x_T} &= \frac{y_T}{x_T^2 + y_T^2}, & \frac{\partial h}{\partial x_T} &= \frac{-x_T z_T}{r_T^2 (x_T^2 + y_T^2)^{1/2}} \\ \frac{\partial A}{\partial y_T} &= \frac{-x_T}{x_T^2 + y_T^2}, & \frac{\partial h}{\partial y_T} &= \frac{-y_T z_T}{r_T^2 (x_T^2 + y_T^2)^{1/2}} \\ \frac{\partial A}{\partial z_T} &= 0, & \frac{\partial h}{\partial z_T} &= \frac{(x_T^2 + y_T^2)^{1/2}}{r_T^2} \end{aligned} \quad (4.9)$$

A matriz de parciais de  $\vec{r}_T$  em relação a  $\vec{r}$  é a própria matriz de rotação  $R_z(\theta, \psi)$ , dado que  $\vec{r}_T = R_z(\theta, \psi) \vec{\rho} = R_z(\theta, \psi) (\vec{r} - \vec{R})$ , onde  $\vec{R}$  é o vetor de coordenadas de posição da estação de rastreamento, que é considerado constante:

$$\frac{\partial \vec{r}^+}{\partial \vec{r}} = R_z(\theta, \psi) = \begin{bmatrix} s\psi \cos\theta & -s\theta & c\theta \cos\psi \\ s\psi \sin\theta & c\theta & s\theta \cos\psi \\ -c\psi & 0 & s\psi \end{bmatrix} \quad (4.10)$$

onde  $c = \cos$  e  $s = \sin$ . As parciais de  $\vec{r}^+$  em relação a  $\Omega$  e  $M$  são (Broucke, 1970):

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial \Omega} &= -y & , & \frac{\partial x}{\partial M} = \dot{x}/n \\ \frac{\partial y}{\partial \Omega} &= x & , & \frac{\partial y}{\partial M} = \dot{y}/n \\ \frac{\partial z}{\partial \Omega} &= 0 & , & \frac{\partial z}{\partial M} = \dot{z}/n \end{aligned} \quad (4.11)$$

onde  $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$  são as componentes de velocidade do satélite no sistema inercial e  $n$  é o movimento médio orbital calculado por:

$$n = (\mu/a^3)^{1/2} \quad (4.12)$$

Uma vez definida a matriz de transição  $\phi$  e a função vetorial  $h$ , o filtro de Kalman é implementado com se segue (Jazwinski, 1970):

- atualização (processamento das medidas):

$$\begin{aligned} \hat{x}_k &= \bar{x}_k + K_k [y_k - h(\bar{x}_k)] \\ \hat{P}_k &= \bar{P}_k - K_k H_k \bar{P}_k \\ K_k &= H_k \bar{P}_k (H_k \bar{P}_k H_k^T + R_k)^{-1} \end{aligned} \quad (4.13)$$

onde  $\hat{x}_k$  é o vetor contendo as estimativas de  $\Omega$  e  $M$ ,  $\hat{P}_k$  é a matriz de covariância dos erros nas estimativas, e  $H_k$  é a matriz de derivadas parciais:

$$H_k = \begin{bmatrix} \partial A / \partial \Omega & \partial A / \partial M \\ \partial h / \partial \Omega & \partial h / \partial M \end{bmatrix} \quad (4.14)$$

- propagação (dinâmica no tempo):

$$\begin{aligned}\bar{x}_{k+1} &= \phi(k) \hat{x}_k \\ \bar{P}_{k+1} &= \phi(k) \hat{P}_k \phi^T(k) + Q_k\end{aligned}\tag{4.15}$$

onde  $Q_k = \text{diagonal } (q_1, q_2)$ . O resultado  $\hat{x}_k$  é a estimativa do estado imediatamente após o processamento das observações de azimute e de elevação do instante  $k$ . As Relações 4.13 foram implementadas sequencialmente, i. e., processando-se uma observação de cada vez.

## 5 - SIMULAÇÕES

Esta seção apresenta as condições de simulação e os resultados obtidos para os métodos determinístico e estatístico desenvolvidos nas Seções 3 e 4.

### 5.1 - SIMULAÇÕES DA ÓRBITA

A órbita de referência foi simulada com base nas seguintes condições:

Época: 1989/01/31 09:58:00 TU

Elementos orbitais:

$$a = 7180 \text{ km}$$

$$e = 0.0436$$

$$i = 23.82^\circ$$

$$\Omega = 240.14^\circ$$

$$\omega = 15.47^\circ$$

$$M = 350.56^\circ$$

As perturbações consideradas foram o geopotencial com os coeficientes zonais truncados no termo 6 e os coeficientes tesserais/setoriais truncados no termo 4, e o arrasto atmosférico com a densidade simulada pelo modelo de Jacchia com dados de atividade solar média. A Figura 5.1 mostra a geometria aproximada das diversas passagens orbitais em relação às estações de Cuiabá e Alcântara. As passagens de números 2,6,7,8 e 9 foram selecionadas para o banco de testes do software de rastreamento assistido.

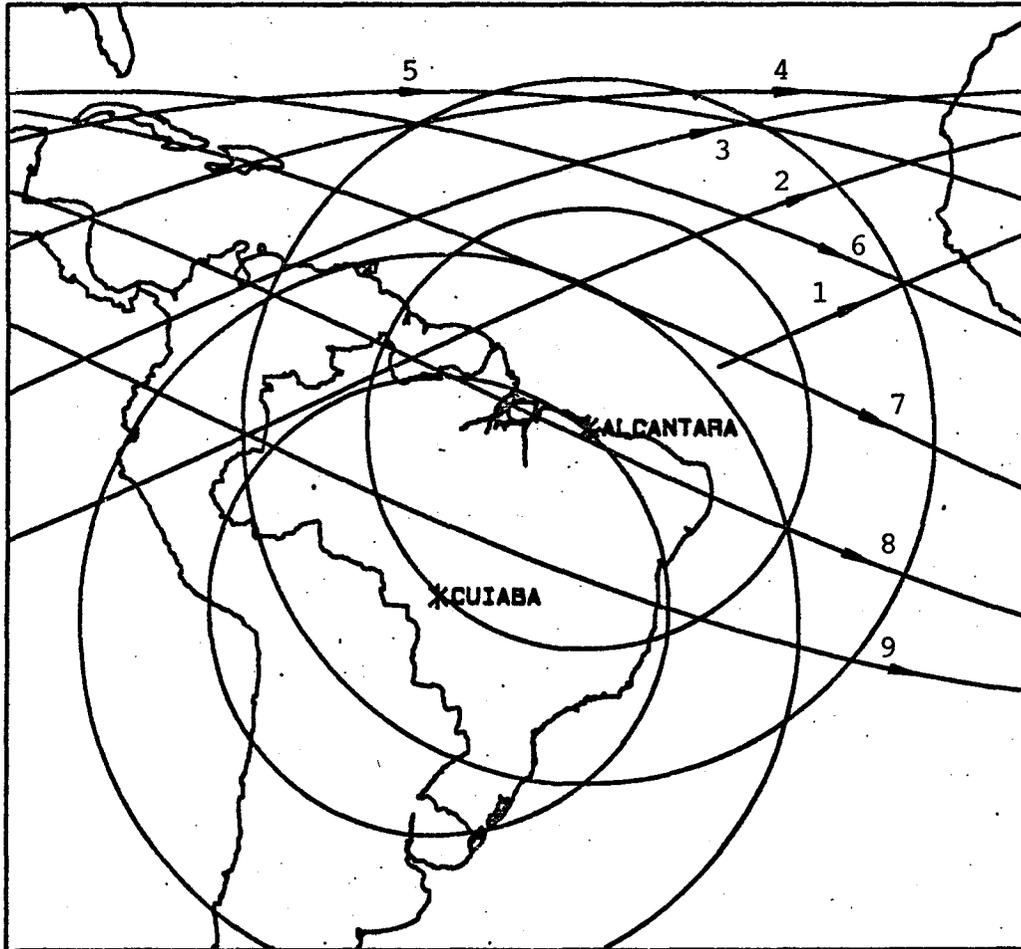


Fig. 5.1 - Geometria das passagens orbitais sobre as estações

## 5.2 - SIMULAÇÃO DAS OBSERVAÇÕES

Dada a órbita de referência, a Tabela 5.1 espelha informações sobre as passagens nas estações de rastreamento, para elevação mínima de 5°:

TABELA 5.1  
GEOMETRIA DAS PASSAGENS

Estação	duração da passagem (min.)	passagem	Elevação máxima (°)
Alcântara	7:30	2 asc.	15.9
	9:47	6 desc.	12.3
	15:25	7 desc.	36.8
	15:57	8 desc.	46.8
Cuiabá	16:18	8 desc.	41.2
	16:58	9 desc.	60.4

Os erros nas observações de azimute e elevação foram simulados, considerando-se componentes aleatórias e também componentes tendenciosas. Para os erros aleatórios o seguinte modelo de geração de ruídos gaussianos foi adotado (Leibold, 1980):

Azimute:

$$\sigma_A = C_1 + C_2 / \cosh h + C_3 \rho / \cosh h$$
$$C_1 = 0.05^\circ, C_2 = 1.E-2, C_3 = 1.E-6 \quad (5.1)$$

Elevação:

$$\sigma_h = C_1 + C_2 \cotan h + C_3 \rho \sinh h$$
$$C_1 = 0.05^\circ, C_2 = 1.E-3, C_3 = 1.E-2 \quad (5.2)$$

onde  $h$  é a elevação e  $\rho$  é a distância entre o satélite e a estação. A componente  $C_1$  (a maior), basicamente representa um erro



de datação da ordem de 0.1 s. As 2ª e 3ª parcelas podem se tornar significativas quando as passagens são zenitais ou azimutais ( $h \cong 90^\circ$  ou  $h \cong 0^\circ$ ). Para os erros tendenciosos, o seguinte modelo foi adotado para a geração de tendências:

Azimute:

$$b_A = C_1 + C_2 / \cosh + C_3 \rho / \cosh$$

$$C_1 = 0.05^\circ, C_2 = 1.E-2, C_3 = 1.E-6 \quad (5.3)$$

Elevação:

$$b_h = C_1 + C_2 / \sinh + C_3 \cotan h$$

$$C_1 = 0.05^\circ, C_2 = 1.E-3, C_3 = 1.E-2 \quad (5.4)$$

Nota-se portanto que as tendências  $b_A$  e  $b_h$  podem ser de mesma ordem de magnitude dos erros aleatórios. É de se esperar que os estimadores de órbita filtrem bem os erros aleatórios mas sigam as tendências. A situação deve se agravar para altas e baixas elevações do satélite. Portanto, as condições de simulação das observações podem ser consideradas mais severas que as encontradas na prática. A Tabela 5.2 mostra os valores máximos dos erros aleatórios e tendenciosos para as simulações realizadas:

TABELA 5.2  
ERROS TENDENCIOSOS E ALEATÓRIOS SIMULADOS

Estação	passagem	"bias" máximo		ruído máximo	
		A(°)	h(°)	A(°)	h(°)
Alcântara	2 asc.	0.06	0.18	-0.21	-0.44
	6 desc.	0.06	0.18	-0.21	-0.48
	7 desc.	0.06	0.17	-0.22	0.39
	8 desc.	0.07	0.18	-0.22	-0.37
Cuiabá	8 desc.	0.06	0.17	-0.22	-0.43
	9 desc.	0.07	0.17	-0.22	-0.37



Além disso, para simular as observações, as seguintes coordenadas foram adotadas para as estações:

Alcântara: longitude  $\lambda = -44.26^\circ$   
latitude  $\phi = -2.18^\circ$   
altura  $H = 39 \text{ m}$

Cuiabá:  $\lambda = -56.07^\circ$   
 $\phi = -15.53^\circ$   
 $H = 277 \text{ m}$

Já para a simulação do software de rastreamento assistido as seguintes coordenadas foram consideradas para as estações:

Alcântara: longitude  $\lambda = -44.2^\circ$   
latitude  $\phi = -2.1^\circ$   
altura  $H = 30 \text{ m}$

Cuiabá:  $\lambda = -56^\circ$   
 $\phi = -15.5^\circ$   
 $H = 270 \text{ m}$

Portanto, os erros nas coordenadas das estações introduzem uma nova componente de erro tendencioso propositadamente.

### 5.3 - CONDIÇÕES INICIAIS

Para ambos os estimadores (determinístico e estatístico), os elementos orbitais do início de cada passagem correspondem à órbita de referência propagada, e corrompida por erros de 3 km e 3 m/s nas componentes de posição e velocidade (5.2 km e 5.2 m/s RMS). Estes erros nos elementos orbitais são da ordem dos erros esperados após uma determinação de órbita seguida de propagação de órbita por 3 semanas que, teoricamente, seria o pior caso de rastreamento e aquisição do satélite em condições de operação



normal. Na prática espera-se realizar ao menos uma determinação de órbita por semana. Estes elementos orbitais corrompidos por erros são então transformados em elementos clássicos, onde se despreza a diferença entre os elementos médios teóricos e os elementos osciladores instantâneos da órbita.

Para o método estatístico, foram também adotados os seguintes valores para as variáveis do filtro de Kalman:

- Valores iniciais da matriz de covariância (inicialmente suposta diagonal):

$$\sigma_{\Omega}^2 = (1^\circ)^2 \quad , \quad \sigma_M^2 = (2^\circ)^2$$

- Matriz de erros dinâmicos  $Q = \text{diag. } (q_1, q_2)$ :

$$q_1 = \begin{cases} 0 \\ (0.01^\circ)^2 \text{ se } P_{11} < \epsilon_i^2 \end{cases}$$

$$q_2 = \begin{cases} 0 \\ (0.01^\circ)^2 \text{ se } P_{22} < \epsilon_i^2 \end{cases}$$

onde  $P_{ii}$  são elementos da diagonal da matriz de covariância.

- Limite inferior da diagonal da covariância:

$$\epsilon_i = 0.05^\circ \text{ (ajustado por tentativa e erro)}$$

- Matriz de erros de observação  $R = \text{diag. } (R_1, R_2)$ :

$$R_1 = (0.1^\circ)^2 \text{ para a observação de azimute}$$

$$R_2 = (0.1^\circ)^2 \text{ para a observação de elevação}$$

Os valores acima foram escolhidos de forma a manterem o filtro robusto e de ganho aberto, às custas de menor velocidade de convergência. Em todos os testes efetuados, o filtro não



apresentou tendência de divergência.

#### 5.4 - RESULTADOS

Os resultados tanto para o método determinístico como para o estatístico foram condensados em forma de tabelas.

Nessas tabelas, a coluna determinação contém informações sobre a fase de processamento das medidas angulares e refinamento dos elementos orbitais, em termos de quantidade de medidas processadas e tempo de processamento em computador gasto nos cálculos. A amostragem admitida é de um par de medidas angulares de azimute e elevação por segundo (1 Hz). A subcoluna  $\Delta t$  contém o intervalo de tempo em minutos a partir da aquisição ( $h = 5^\circ$ ) na qual as medidas foram processadas. Assim, por exemplo,  $\Delta t = 01:00$  min. significa que 60 pares de medidas angulares foram processadas na fase de determinação. A subcoluna CPU contém o tempo de CPU em minutos gasto pelo computador VAX 780 para processar essas medidas e refinar a órbita.

A coluna previsão contém informações sobre a fase de geração de dados angulares de apontamento. As estimativas refinadas na fase anterior de determinação são utilizadas para propagar a órbita analiticamente pelo método de Brouwer (1959) e gerar, a uma taxa de 1 Hz, os ângulos de apontamento de azimute e elevação que a antena deve seguir. Neste caso, a subcoluna  $\Delta t$  representa o intervalo total de tempo em minutos na qual se realizou a previsão dos ângulos de apontamento, e a subcoluna CPU representa o tempo em minutos de CPU (VAX 780) gastos para produzir estas previsões. Para cada passagem foram simuladas 3 situações de perda de sinal, uma no início, uma no meio, e uma no fim da passagem.

A coluna  $e_{\max}$  ( $^\circ$  RMS) representa o erro RMS máximo cometido pelo preditor durante o intervalo de previsão, com:



$$\varepsilon_{\max} = \max \{ \varepsilon = (\varepsilon_A^2 + \varepsilon_h^2)^{1/2} \}$$

onde  $\varepsilon_A$  e  $\varepsilon_h$  são os erros cometidos em azimute e elevação quando se comparam os ângulos preditos com os ângulos simulados sem erros quer nos elementos orbitais, nas coordenadas das estações, ou nas medidas.

A Tabela 5.3 mostra os resultados para o método determinístico e a Tabela 5.4 mostra os resultados para o método estatístico.

TABELA 5.3  
RESULTADOS PARA O MÉTODO DETERMINÍSTICO

Estação	passagem	Determinação		Previsão		$\varepsilon_{\max}$ (°)
		$\Delta t$	CPU	$\Delta t$	CPU	
Alcântara	2 asc.	01:00	00:01	06:30	00:05	0.90
		03:30	00:03	04:00	00:03	0.65
		06:00	00:06	01:30	00:01	0.52
	6 desc.	01:00	00:01	08:47	00:07	0.32
		03:30	00:03	06:17	00:05	0.25
		06:00	00:06	03:47	00:03	0.23
	7 desc.	05:00	00:05	10:25	00:08	0.40
		10:00	00:10	05:25	00:04	0.28
		15:00	00:15	00:25	00:01	0.17
	8 desc.	05:00	00:05	10:57	00:09	0.50
		10:00	00:10	05:57	00:05	0.32
		15:00	00:15	00:57	00:01	0.20
Cuiabá	8 desc.	05:00	00:05	11:18	00:09	0.52
		10:00	00:10	06:18	00:05	0.36
		15:00	00:15	01:18	00:01	0.22
	9 desc.	05:00	00:05	11:58	00:10	0.88
		10:00	00:09	06:58	01:05	0.45
		15:00	00:15	01:58	00:01	0.25



TABELA 5.4  
RESULTADOS PARA O MÉTODO ESTATÍSTICO

Estação	passagem	Determinação		Previsão		$\epsilon_{\max}$ (%)
		$\Delta t$	CPU	$\Delta t$	CPU	
Alcântara	2 asc.	01:00	00:16	06:30	00:05	0.85
		03:30	00:53	04:00	00:03	0.50
		06:00	01:31	01:30	00:01	0.15
	6 desc.	01:00	00:15	08:47	00:07	0.29
		03:30	00:51	06:17	00:05	0.25
		06:00	01:27	03:47	00:03	0.22
	7 desc.	05:00	01:17	10:25	00:08	0.42
		10:00	02:35	05:25	00:04	0.18
		15:00	03:48	00:25	00:01	0.13
	8 desc.	05:00	01:14	10:57	00:09	0.53
		10:00	02:28	05:57	00:05	0.20
		15:00	03:43	00:57	00:01	0.13
Cuiabá	8 desc.	05:00	01:14	11:18	00:09	0.55
		10:00	02:27	06:18	00:05	0.22
		15:00	03:41	01:18	00:01	0.13
	9 desc.	05:00	01:14	11:58	00:10	0.86
		10:00	02:29	06:58	00:05	0.25
		15:00	03:43	01:58	00:01	0.15

As Figuras 5.2, 5.3 e 5.4 ilustram o comportamento dos erros  $\epsilon$  (RMS),  $\epsilon_A$  (erro em Azimute) e  $\epsilon_h$  (erro em elevação) em graus ao longo do tempo, durante as fases de determinação e previsão, para uma passagem escolhida arbitrariamente (passagem 2 asc. sobre Alcântara). Este comportamento foi obtido para o método determinístico, indicando que este método estima bem o valor médio dos elementos orbitais. Como usou-se, na simulação das observações, um propagador numérico de órbita, o erro consiste basicamente na diferença entre o elemento osculador e seu valor médio. É natural, portanto, que em certas situações, o erro possa ser grande no início da fase de propagação (previsão) e que venha a diminuir depois, já que os elementos osculadores têm um comportamento cíclico no tempo.

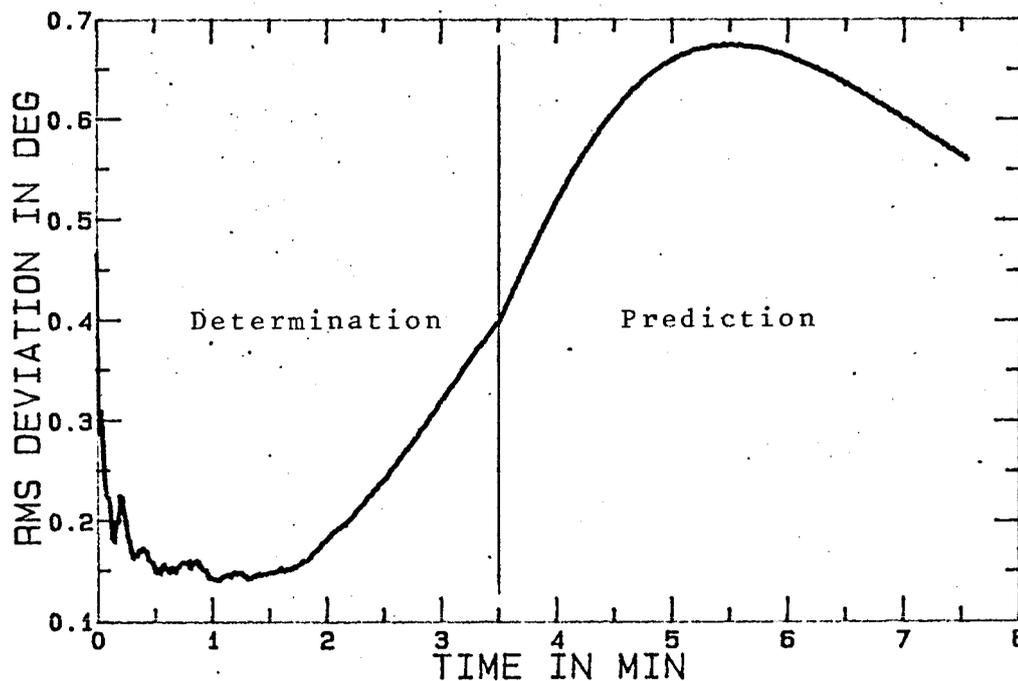


Figura 5.2 - Erros angulares RMS para o método determinístico

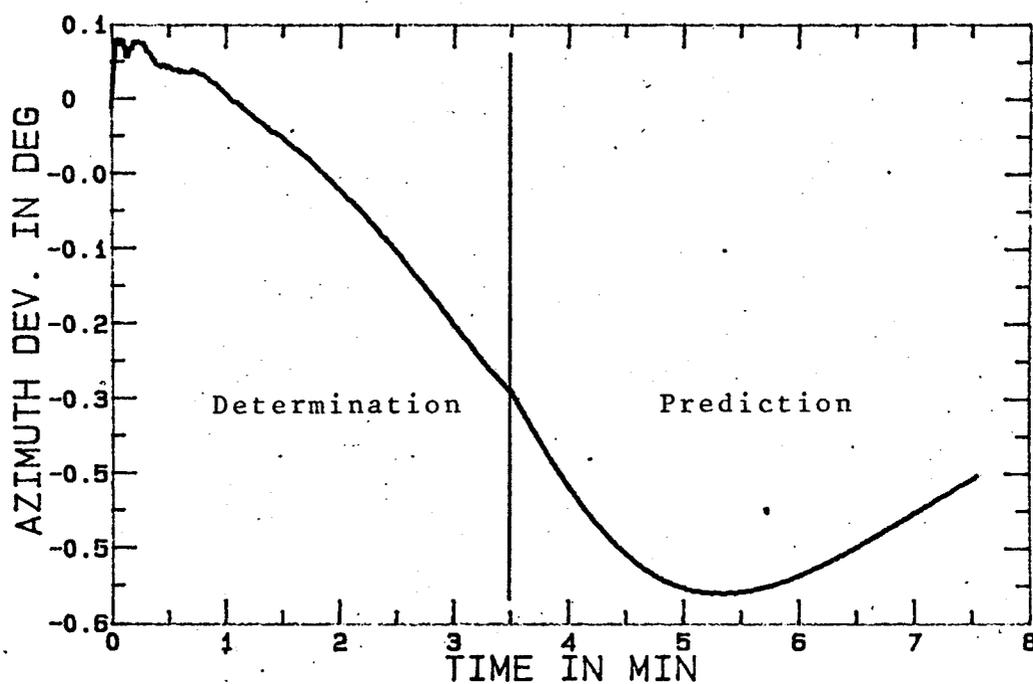


Fig. 5.3 - Erros em azimute (método determinístico).

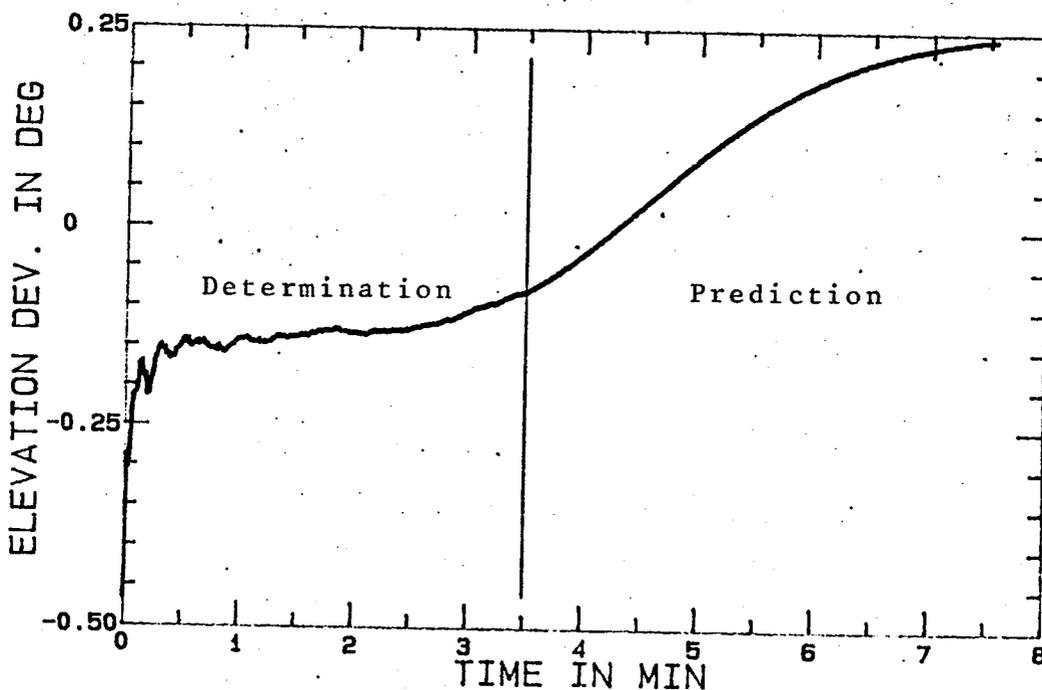


Fig. 5.4 - Erros em elevação (método determinístico).

As Figuras 5.5, 5.6 e 5.7 ilustram os resultados obtidos pelo método estatístico, para as mesmas condições..

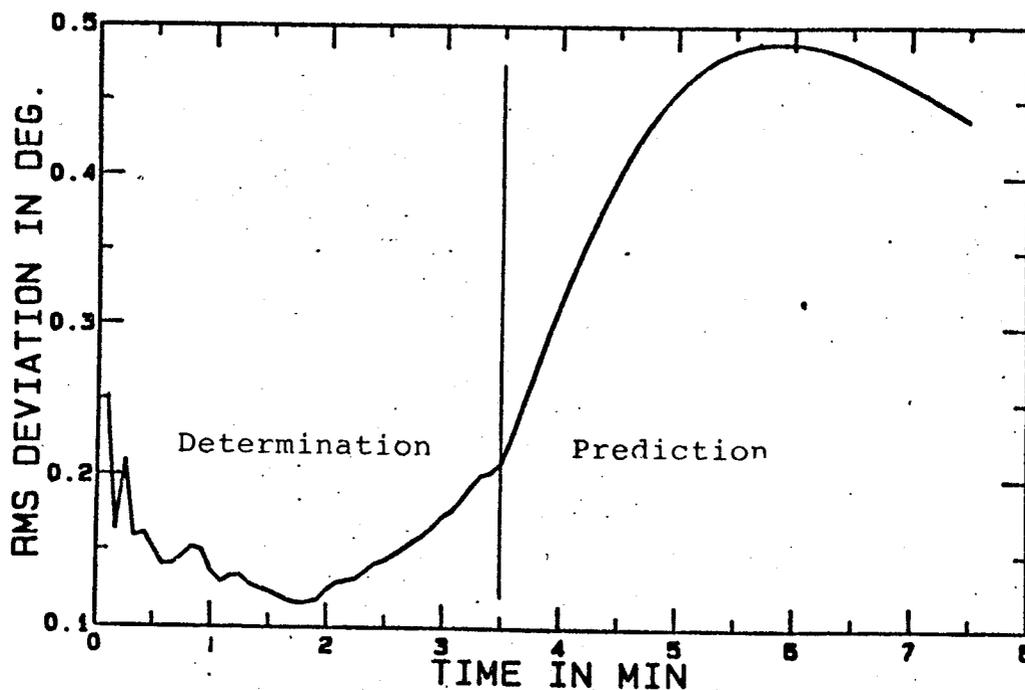


Fig. 5.5 - Erros angulares RMS para o método estatístico.

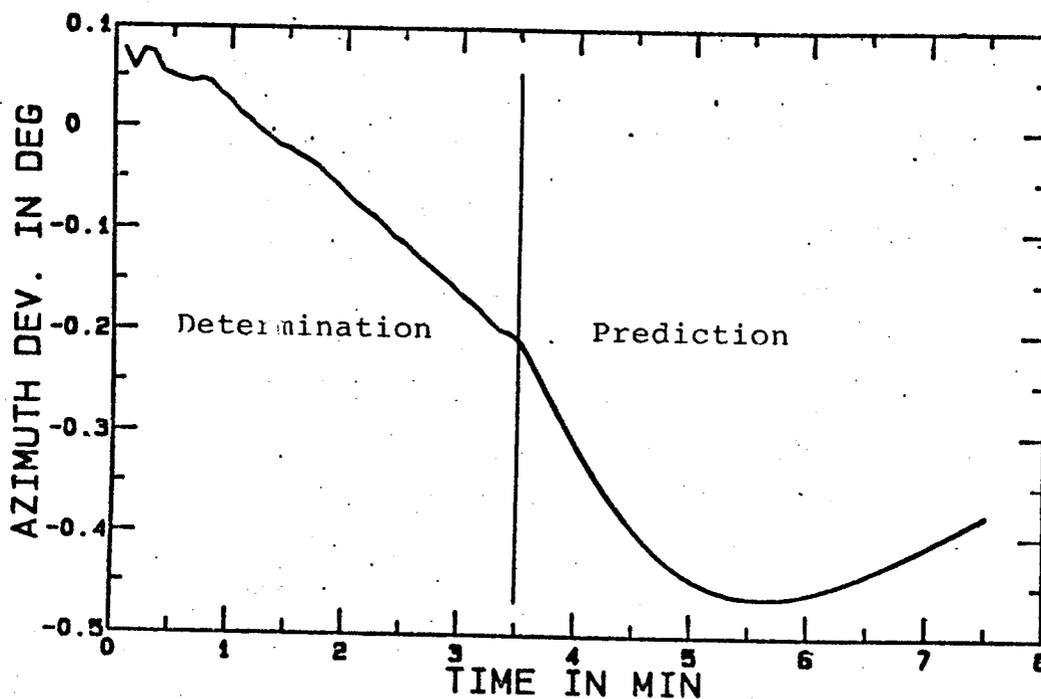


Fig. 5.6 - Erros em azimute para o método estatístico.

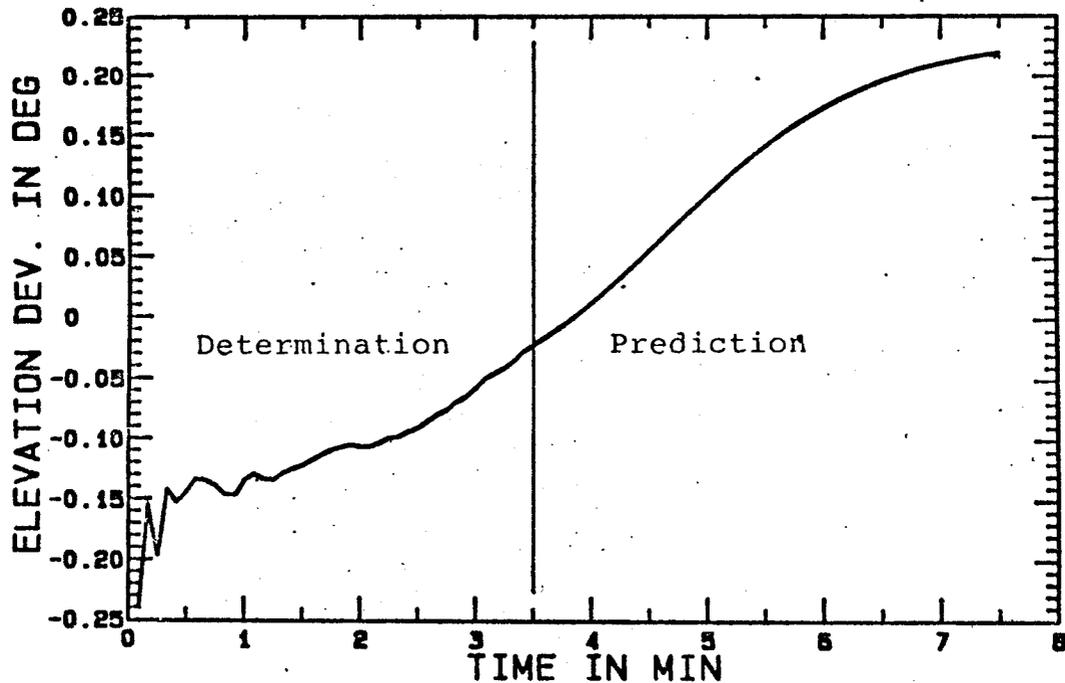


Figura 5.7 - Erros em elevação para o método estatístico

Nota-se que na fase de previsão o erro  $\epsilon$  é menor em instantes próximos ao final da determinação, como era de se esperar. No intervalo total de previsão, o comportamento do erro  $\epsilon$  é imprevisível, podendo aumentar ou diminuir. Em outras palavras, a reaquisição do sinal do satélite deve ser preferencialmente realizada em instante não muito distante do fim de refinamento das estimativas orbitais, onde o erro  $\epsilon$  é compatível com o erro cometido pelo estimador. Porém, nos teste realizados, o erro  $\epsilon_{\max}$  ( $\cong 0.9^\circ$ ) parece estar perfeitamente sobre controle, uma vez que a antena deve ter um ângulo lobular de cerca de  $1^\circ$  a  $3$  Db.



## 6 - COMENTÁRIOS FINAIS

Simulações foram realizadas com o objetivo de testar algoritmos para o software de rastreamento assistido, e fornecer subsídios para a seleção do algoritmo adequado. Em termos de tempo de CPU gasto, o método determinístico é mais rápido. Em termos de precisão e robustez o método estatístico (filtro de Kalman) apresenta melhores resultados durante a fase de determinação, pois é menos sensível à magnitude dos erros aleatórios das medidas. Deve ser notado que, da forma como foram implementados os métodos, embora próximos, os resultados indicam claramente uma diferença entre ambos: o filtro de Kalman segue o comportamento dinâmico dos elementos osciladores ao passo que o método determinístico estima o valor médio. Ambos os métodos no entanto conseguem realizar o processamento das medidas em tempo real. Portanto, o fator determinante para a escolha definitiva de um dos 2 métodos é o "overhead" computacional resultante das interfaces de comunicação do software com o controlador da antena, e de processos que estarão concorrentemente sendo realizados no computador da ET, que poderiam limitar o tempo disponível para o processo de determinação, propagação de órbita, e previsão dos ângulos de apontamento da antena em tempo real.